

CAPÍTULO 2: PROPORCIONALIDAD

INTRODUCCIÓN

A Esther le gusta ir en bicicleta a la escuela y ha comprobado que en hacer ese recorrido tarda andando cuatro veces más. Tenemos aquí tres magnitudes: tiempo, distancia y velocidad.

Recuerda que:

Una **magnitud** es una propiedad física que se puede medir.

A más velocidad se recorre más distancia.

Son **magnitudes directamente proporcionales**.

A más velocidad se tarda menos tiempo.

Son **magnitudes inversamente proporcionales**.

Pero, cuidado, no todas las magnitudes son proporcionales. Esto es una confusión muy frecuente. Porque al crecer una magnitud, la otra también crezca, aún no se puede asegurar que sean directamente proporcionales. Por ejemplo, Esther recuerda que hace unos años tardaba más en recorrer el mismo camino, pero la edad no es directamente proporcional al tiempo que se tarda. Vamos a estudiarlo con detalle para aprender a reconocerlo bien.

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1.1. Magnitudes directamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

✚ Si tres bolsas contienen 15 caramelos, siete bolsas (iguales a las primeras) contendrán 35 caramelos, porque:

$$3 \cdot 5 = 15 \quad 7 \cdot 5 = 35$$

La **razón de proporcionalidad directa** k es el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Ejemplo:

✚ En el ejemplo anterior la razón de proporcionalidad es 5, porque: $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

Ejemplo:

✚ Copia en tu cuaderno la siguiente tabla, calcula la razón de proporcionalidad y completa los huecos que faltan sabiendo que es una tabla de proporcionalidad directa:

Magnitud A	18	1,5	60	2,7	0,21
Magnitud B	6	0,5	20	0,9	0,07

La razón de proporcionalidad es $k = \frac{18}{6} = 3$. Por tanto todos los valores de la magnitud B son tres veces menores que los

de la magnitud A: $\frac{18}{6} = \frac{1,5}{0,5} = \frac{60}{20} = \frac{2,7}{0,9} = \frac{0,21}{0,07} = 3$.

Observa que:

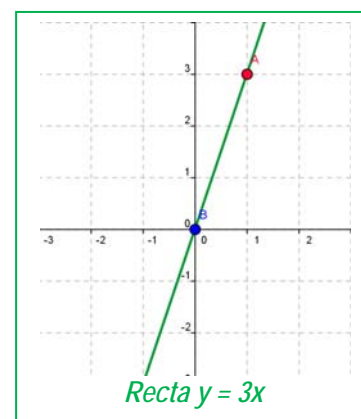
Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad directa, todos ellos están sobre una **recta** que pasa por el origen de coordenadas. La razón de proporcionalidad es la **pendiente** de la recta. La función lineal $y = kx$ se denomina también **función de proporcionalidad directa**.

Ejemplo:

✚ Ecuación de la recta del ejemplo anterior

La ecuación de la recta es $y = 3x$. Comprobamos que todos los puntos la verifican:

$$18 = 3 \cdot 6; \quad 1,5 = 3 \cdot 0,5; \quad 60 = 3 \cdot 20; \quad 2,7 = 3 \cdot 0,9; \quad 0,21 = 3 \cdot 0,07.$$



Reducción a la unidad

Si debemos usar la misma ecuación de la recta en distintas ocasiones el problema puede simplificarse con la **reducción a la unidad**. Si $x = 1$ entonces $y = k$.

Ejemplo:

- ✚ Para celebrar su cumpleaños José ha comprado 3 botellas de refresco que le han costado 4,5 €. Piensa que no van a ser suficientes y decide comprar 2 más. Calcula el precio de las 2 botellas utilizando la reducción a la unidad.

$$y = \frac{4,5}{3}x \Rightarrow y = \frac{4,5}{3} \cdot 1 \Rightarrow k = 1,5 \Rightarrow y = 1,5x. \text{ Ahora podemos calcular el precio de cualquier número de botellas. En nuestro caso } x = 2, \text{ luego } y = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ €.}$$

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

$$\text{a) } \frac{24}{100} = \frac{30}{x} \quad \text{b) } \frac{x}{80} = \frac{46}{12} \quad \text{c) } \frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$$

3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?

1.2. Proporcionalidad simple directa

Acabamos de ver que la proporcionalidad simple directa consiste en encontrar la ecuación de una recta que pasa por el origen: $y = kx$.

Ejemplo:

- ✚ Veinte cajas pesan 400 kg, ¿cuántos kg pesan 7 cajas?

Buscamos la ecuación de la recta: $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400/20 = 20 \Rightarrow y = 20x$ Ecuación de la recta

Si $x = 7$ entonces $y = 20 \cdot 7 = 140$ kg.

Actividades propuestas

- En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?
- La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?
- Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?
- Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?
- Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5823 km?
- Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?
- Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?

1.3. Porcentajes

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana.

El **tanto por ciento** es una razón con denominador 100.

Ejemplo:

$$\text{✚ } 37\% = \frac{37}{100}. \text{ La ecuación de la recta es: } y = \frac{37}{100}x.$$

Los porcentajes son proporciones directas.

Ejemplo:

- La población de Zarzalejo era en 2013 de 7380 habitantes. En 2014 se ha incrementado en un 5 %. ¿Cuál es su población a final de 2014?

$y = \frac{7380}{100} x$, por lo que el 5 % de 7392 es $y = \frac{7380}{100} \cdot 5 = 369$ habitantes. La población se ha incrementado en 369 habitantes, luego al final de 2014 la población será de: $7380 + 369 = 7749$ habitantes.

Actividades propuestas

11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a) $\frac{27}{100}$

b) "1 de cada 2"

c) $\frac{52}{90}$

12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

13. Un depósito de 2000 litros de capacidad contiene en este momento 1036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?

1.4. Incremento porcentual. Descuento porcentual. Porcentajes encadenados**Incremento porcentual****Ejemplo:**

- El ejemplo anterior puede resolverse mediante **incremento porcentual**: $100 + 5 = 105$ %

$y = \frac{7380}{100} x$, por lo que el 105 % de 7392 es $y = \frac{7380}{100} \cdot 105 = 7749$ habitantes.

Descuento porcentual

- En las rebajas a todos los artículos a la venta les aplican un 30 % de descuento. Calcula el precio de los que aparecen en la tabla:

Precio sin descuento	75 €	159 €	96 €	53 €
Precio en rebajas	52,50 €	111,3 €	67,2 €	37,1 €

Ya que nos descuentan el 30 %, pagaremos el 70 %. Por tanto: $k = \frac{70}{100} = 0,7$ es la razón directa de proporcionalidad que aplicaremos a los precios sin descuento para calcular el precio rebajado. Por tanto: $y = 0,7 x$.

Porcentajes encadenados

Muchas veces hay que calcular varios incrementos porcentuales y descuentos porcentuales. Podemos **encadenarlos**. En estos casos lo más sencillo es calcular, para cada caso, el tanto por uno, e irlos multiplicando.

Ejemplo:

- En unas rebajas se aplica un descuento del 30 %, y el IVA del 21 %. ¿Cuánto nos costará un artículo que sin rebajar y sin aplicarle el IVA costaba 159 euros? ¿Cuál es el verdadero descuento?

En un descuento del 30 % debemos pagar un 70 % ((100 - 30) %), por lo que el tanto por uno es de 0,7. Por el incremento del precio por el IVA del 21 % ((100 + 21) %) el tanto por uno es de 1,21. Encadenando el descuento con el incremento tendremos un índice o tanto por uno de $0,7 \cdot 1,21 = 0,847$, que aplicamos al precio del artículo, 159 €, $0,847 \cdot 159 = 134,673$ € \approx 134,67 €. Por tanto nos han descontado 24,33 euros.

Si estamos pagando el 84,7 % el verdadero descuento es el 15,3 %.

Ejemplo:

- Calcula el precio inicial de un televisor, que después de subirlo un 20 % y rebajarlo un 20 % nos ha costado 432 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de variación?

Al subir el precio un 20 % estamos pagando el 120 % y el tanto por uno es 1,2. En el descuento del 20 % estamos pagando el 80 % y el tanto por uno es 0,8. En total con las dos variaciones sucesivas el tanto por uno es de $0,8 \cdot 1,2 = 0,96$, y el precio inicial es $432 : 0,96 = 450$ €. Precio inicial = 450 €.

El tanto por uno 0,96 es menor que 1 por lo tanto ha habido un descuento porque hemos pagado el 96 % del valor inicial y este descuento ha sido del 4 %.

Actividades propuestas

15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.
16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.
17. Copia en tu cuaderno y completa:
 - a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un % de descuento
 - b) Me han descontado el 9 % de una factura de € y he pagado 280 €.
 - c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?
19. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 % ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?
20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.
21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un 20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

1.7. Escalas

En planos y mapas encontramos anotadas en su parte inferior la escala a la que están dibujados.

La **escala** es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.

Ejemplo:

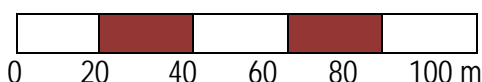
Se expresa de la forma 1 : 2000 que significa que 1 cm del plano corresponde a 2000 cm = 20 m en la realidad.

Por tanto si "y" son las medidas en la realidad, y "x" lo son en el plano, esta escala se puede escribir con la ecuación de la recta:

$$y = 2000x.$$

Las escalas también se representan en forma gráfica, mediante una barra dividida en segmentos de 1 cm de longitud

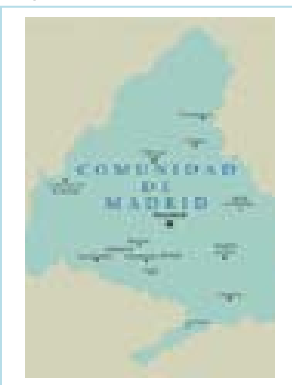
Ejemplo:



Esta escala identifica cada centímetro del mapa con 20 m en la realidad es decir 1 : 2000, $y = 2000x$.

Al estudiar la semejanza volveremos a insistir en las escalas.

Un instrumento sencillo para realizar trabajos a escala es el **pantógrafo** que facilita copiar una imagen o reproducirla a escala.



El pantógrafo es un paralelogramo articulado que, al variar la distancia entre los puntos de articulación, permite obtener diferentes tamaños de dibujo sobre un modelo dado.

Actividades propuestas

22. La distancia real entre dos pueblos es 28,6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?
23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?
24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.
25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1 : 50, calcula sus medidas reales.



2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

2.1. Magnitudes inversamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:

- ✚ Cuando un automóvil va a 90 km/h, tarda cuatro horas en llegar a su destino. Si fuera a 120 km/h tardaría 3 horas en hacer el mismo recorrido.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

La **razón de proporcionalidad inversa** k' es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$

Ejemplo:

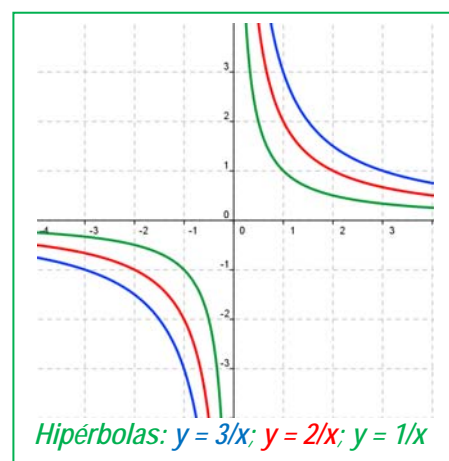
- ✚ Copia la tabla en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

a	18	150	1,5	3600	100
b	50	6	600	0,25	9

$k' = 18 \cdot 50 = 900$. Comprueba que todas las columnas dan este resultado.

Observa que:

Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad inversa, todos ellos están sobre la gráfica de una **hipérbola** de ecuación $y = \frac{k'}{x}$. La razón de proporcionalidad inversa es la **constante** k' . A esta hipérbola $y = \frac{k'}{x}$ también se la denomina **función de proporcionalidad inversa**.



Ejemplo:

- ✚ Ecuación de la hipérbola del ejemplo anterior

La hipérbola es $y = \frac{900}{x}$. Comprobamos que todos los puntos verifican la ecuación de dicha hipérbola:

$$y = \frac{900}{18} = 50; \quad y = \frac{900}{150} = 6; \quad y = \frac{900}{1,5} = 600; \quad y = \frac{900}{3600} = 0,25; \quad y = \frac{900}{100} = 9.$$

Actividades propuestas

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12			60
Horas de trabajo			80		28	10	

2.2. Proporcionalidad simple inversa

Para calcular el cuarto término entre dos magnitudes inversamente proporcionales calculamos la constante de proporcionalidad y escribimos la ecuación de la hipérbola

Ejemplo:

- ✚ Cuatro personas realizan un trabajo en 18 días, ¿cuántas personas necesitaremos para realizar el mismo trabajo en 8 días?

$$k = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ personas.}$$

Actividades propuestas

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1,25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?
28. En un huerto ecológico se utilizan 5000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?
29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1,7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2,3 kilogramos?
30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?
31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

2.3. Proporcionalidad compuesta

Una proporción en la que intervienen más de dos magnitudes ligadas entre sí por relaciones de proporcionalidad directa o inversa se denomina **proporción compuesta**.

Ejemplo:

- ✚ En el instituto 30 alumnos de 4º A de ESO han ido a esquiar y han pagado 2700 € por 4 noches de hotel; 25 alumnos de 4º B de ESO han ganado en la lotería 3375 € y deciden ir al mismo hotel. ¿Cuántas noches de alojamiento pueden pagar?

Tenemos tres magnitudes: el número de alumnos, la cantidad en € que pagan por el hotel y el número de noches de hotel. Observa que a más alumnos se paga más dinero, luego estas magnitudes son directamente proporcionales. A más noches de hotel se paga más dinero, luego estas otras dos magnitudes son también directamente proporcionales. Pero para una cantidad de dinero fija, a más alumnos pueden ir menos noches, luego el número de alumnos es inversamente proporcional al número de noches de hotel.

El mejor método es reducirlo a un problema de proporcionalidad simple, para ello obtenemos el precio del viaje por alumno.

Cada alumno de 4º A ha pagado $2700 : 30 = 90$ € por 4 noches de hotel. Luego ha pagado por una noche $90/4 = 22,5$ €. La ecuación de proporcionalidad directa es: $y = 22,5x$, donde "y" es lo que paga cada alumno y "x" el número de noches.

Cada alumno de 4º B cuenta con $3375 : 25 = 135$ € para pasar x noches de hotel, por lo que $135 = 22,5x$, luego pueden estar 6 noches.

Actividades propuestas

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?
33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?
34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?
35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?
36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?
37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?
38. Si 4 máquinas fabrican 2400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7000 piezas durante 10 horas diarias?

3. REPARTOS PROPORCIONALES

Cuando se realiza un reparto en partes desiguales se debe establecer previamente si se trata de un reparto proporcional directo o inverso.

3.1. Reparto proporcional directo

En un reparto proporcional directo le corresponderá más a quien tiene más partes.

Actividad resuelta

- ✚ Tres amigos deben repartirse los 400 € que han ganado en una competición de acuerdo a los puntos que cada uno ha obtenido. El primero obtuvo 10 puntos, el segundo 7 y el tercero 3 puntos.

El reparto directamente proporcional se inicia sumando los puntos: $10 + 7 + 3 = 20$ puntos.

Calculamos el premio por punto: $400 : 20 = 20$ €.

El primero obtendrá $20 \cdot 10 = 200$ €.

El segundo: $20 \cdot 7 = 140$ €.

El tercero: $20 \cdot 3 = 60$ €.

La suma de las tres cantidades es $200 + 140 + 60 = 400$ €, la cantidad total a repartir.

Como se trata de una proporción, se debe establecer la siguiente regla:

Sea N (en el ejemplo anterior 400) la cantidad a repartir entre cuatro personas, a las que les corresponderá A, B, C, D de manera que $N = A + B + C + D$. Estas cantidades son proporcionales a su participación en el reparto: a, b, c, d .

$a + b + c + d = n$ es el número total de partes en las que ha de distribuirse N .

$N : n = k$ que es la cantidad que corresponde a cada parte. En el ejemplo anterior: $k = 400 : 20 = 20$.

El reparto finaliza multiplicando k por a, b, c y d , obteniéndose así las cantidades correspondientes A, B, C y D .

Es decir, ahora la ecuación de la recta es: $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}x = \frac{N}{n}x$

Actividades propuestas

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
40. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?
41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48.000.000 € para tres Estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?
42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.
43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

3.2. Reparto proporcional inverso

En un reparto proporcional inverso recibe más quien menos partes tiene.

Sea N la cantidad a repartir y a, b y c las partes. Al ser una proporción inversa, el reparto se realiza a sus inversos $1/a, 1/b, 1/c$. Para calcular las partes totales, reducimos las fracciones a común denominador, para tener un patrón común, y tomamos los numeradores que son las partes que corresponden a cada uno.

Actividad resuelta

- ✚ Repartir 4000 € de forma inversamente proporcional a 12 y 20.

Calculamos el total de las partes: $1/12 + 1/20 = 5/60 + 3/60 = 8/60$.

$4000 : 8 = 500$ € cada parte. $500 \cdot 5 = 2500$ €. $500 \cdot 3 = 1500$ €.

En efecto, $2500 + 1500 = 4000$.

Actividades propuestas

44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?
45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?
46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?
47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?
48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

3.3. Mezcla y aleaciones

Las **mezclas** que vamos a estudiar son el resultado final de combinar distintas cantidades de productos, de distintos precios.

Actividad resuelta

- ✚ Calcula el precio final del litro de aceite si mezclamos 13 litros a 3,5 € el litro, 6 litros a 3,02 €/l y 1 litro a 3,9 €/l. Calculamos el coste total de los distintos aceites:

$$13 \cdot 3,5 + 6 \cdot 3,02 + 1 \cdot 3,9 = 67,52 \text{ €}.$$

Y el número total de litros: $13 + 6 + 1 = 20$ l.

El precio del litro de mezcla valdrá $67,52 : 20 = 3,376$ €/l.

Actividades propuestas

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.

50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1,80 €/l para obtener una mezcla a 2,13 €/l?

Una **aleación** es una mezcla de metales para conseguir un determinado producto final con mejores propiedades o aspecto.

Las aleaciones se realizan en joyería mezclando metales preciosos, oro, plata, platino, con cobre o rodio. Según la proporción de metal precioso, se dice que una joya tiene más o menos **ley**.

La **ley** de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.

Ejemplo:

- ✚ Una joya de plata de 50 g de peso contiene 36 g de plata pura. ¿Cuál es su ley?

$$\text{Ley} = \frac{\text{peso metal puro}}{\text{peso total}} = \frac{36}{50} = 0,72$$

Otra forma de medir el grado de pureza de una joya es el **quilate**.

Un **quilate de un metal precioso** es $1/24$ de la masa total de la aleación.

Para que una joya sea de oro puro ha de tener 24 quilates.

Ejemplo:

Una joya de oro de 18 quilates pesa 62 g. ¿Qué cantidad de su peso es de oro puro?

$$\text{Peso en oro} = \frac{62 \cdot 18}{24} = 46,5 \text{ g}.$$

El término **quilate** viene de la palabra griega "keration" (algarroba). Esta planta, de semillas muy uniformes, se utilizaba para pesar joyas y gemas en la antigüedad.

Actividades propuestas

51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro.

¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?

4. INTERÉS

4.1. Cálculo de interés simple

El **interés** es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo.

En el **interés simple**, al capital C depositado se le aplica un tanto por ciento o rédito r anualmente.

El cálculo del interés obtenido al cabo de varios años se realiza mediante la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el tiempo que se deposita el capital son meses o días, el interés se calcula dividiendo la expresión anterior entre 12 meses o 360 días (año comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \quad \text{tiempo en meses} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \quad \text{tiempo en días}$$

Actividades resueltas

- ✚ Depositamos 4000 € al 2 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 30 meses?

Calculamos el interés simple:

$$I = \frac{4000 \cdot 2 \cdot 30}{1200} = 200 \text{ €}$$

Sumamos capital e intereses:

$$4000 + 200 = 4200 \text{ €}$$

Actividades propuestas

52. Calcula el interés simple que producen 10.000 € al 3 % durante 750 días.

53. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

4.2. Interés compuesto

Desde otro punto de vista, el interés es el porcentaje que se aplica a un préstamo a lo largo de un tiempo, incrementando su cuantía a la hora de devolverlo.

Este tipo de interés no se calcula como el interés simple sino que se establece lo que se llama "*capitalización*".

El **interés compuesto** se aplica tanto para calcular el capital final de una inversión, como la cantidad a devolver para amortizar un préstamo.

Normalmente los préstamos se devuelven mediante cuotas mensuales que se han calculado a partir de los intereses generados por el préstamo al tipo de interés convenido.

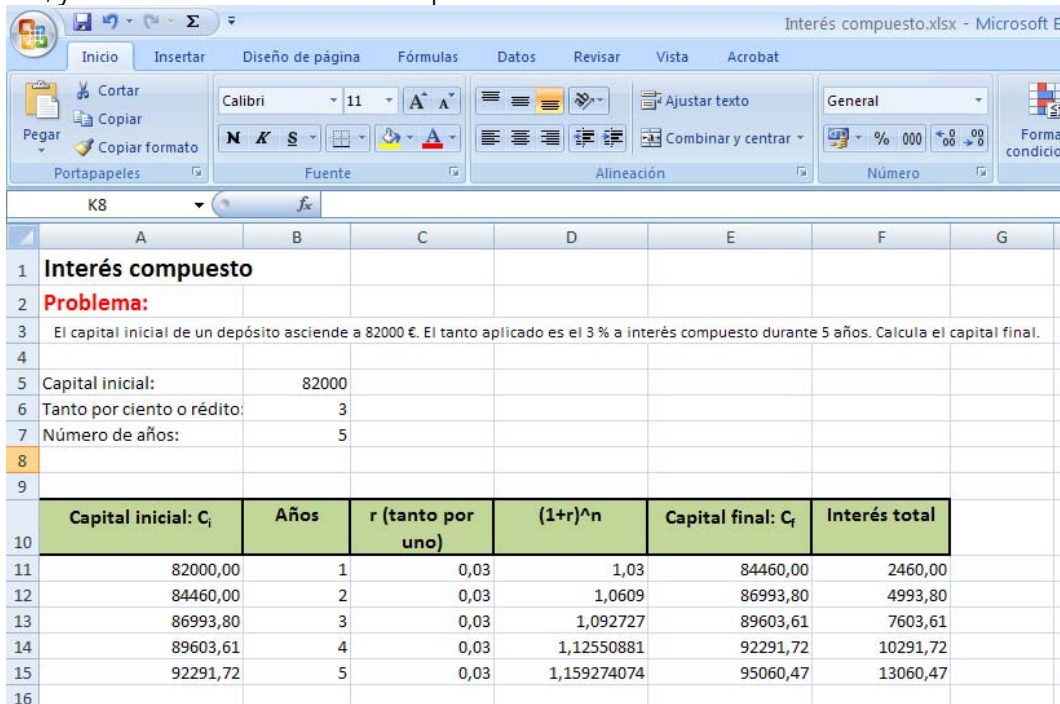
La capitalización compuesta plantea que, a medida que se van generando intereses, pasen a formar parte del capital inicial, y ese nuevo capital producirá intereses en los periodos sucesivos.

Si se trata de un depósito bancario, el capital final se calculará siguiendo el siguiente procedimiento:

C_i (capital inicial)	1 año	i (tanto por uno)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 años	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 años	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
.....
	n años		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cabo de n años, el capital final será $C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$.

Para hacer los cálculos puedes utilizar una "[Hoja de cálculo](#)". Basta que en la hoja de cálculo adjunta modifiques los datos de las casillas B5 donde está el "Capital inicial", casilla B6 donde está el "Tanto por uno" y de la casilla B7 donde aparece el número de "Años", y arrastres en la columna B hasta que el número final de años coincida con dicha casilla.



Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
89603,61	4	0,03	1,1250881	92291,72	10291,72
92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47

Actividades resueltas

- ✚ El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto por ciento aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0,03)^5 = 82000 \cdot 1,159... = 95060 \text{ €}$$

Actividades propuestas

54. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39500 €?

RESUMEN

		<i>Ejemplos</i>								
Proporcionalidad directa	<p>Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.</p> <p>La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen: $y = kx$. La pendiente de la recta, k, es la razón de proporcionalidad directa.</p>	<p>Para empapelar 300 m² hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m², necesitaremos 8,32 rollos, pues $k = 300/24 = 12,5$, $y = 12,5x$, por lo que $x = 104/12,5 = 8,32$ rollos.</p>								
Proporcionalidad inversa	<p>Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.</p> <p>La función de proporcionalidad inversa es la hipérbola $y = k'/x$. Por tanto la razón de proporcionalidad inversa k' es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.</p>	<p>Dos personas pintan una vivienda en 4 días. Para pintar la misma vivienda, 4 personas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, por lo que tardarán 2 días.</p>								
Porcentajes	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2400 es $\frac{87}{100} \cdot 2400 = 2088$								
Escalas	La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.	A escala 1:50000, 35 cm son 17,5 km en la realidad.								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: left;">Reparto proporcional directo</th> <th style="width: 50%; text-align: left;">Reparto proporcional inverso</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Repartir directamente a 6,10 y 14, 105000 €</td> <td>Repartir 5670 inversamente a 3,5 y 6</td> </tr> <tr> <td>$6 + 10 + 14 = 30$ $105000 : 30 = 3500$</td> <td>$1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5670 : 21 = 270$</td> </tr> <tr> <td>$6 \cdot 3500 = 21000$ € $10 \cdot 3500 = 35000$ € $14 \cdot 3500 = 49000$ €</td> <td>$270 \cdot 10 = 2700$ $270 \cdot 6 = 1620$ $270 \cdot 5 = 1350$</td> </tr> </tbody> </table>			Reparto proporcional directo	Reparto proporcional inverso	Repartir directamente a 6,10 y 14, 105000 €	Repartir 5670 inversamente a 3,5 y 6	$6 + 10 + 14 = 30$ $105000 : 30 = 3500$	$1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5670 : 21 = 270$	$6 \cdot 3500 = 21000$ € $10 \cdot 3500 = 35000$ € $14 \cdot 3500 = 49000$ €	$270 \cdot 10 = 2700$ $270 \cdot 6 = 1620$ $270 \cdot 5 = 1350$
Reparto proporcional directo	Reparto proporcional inverso									
Repartir directamente a 6,10 y 14, 105000 €	Repartir 5670 inversamente a 3,5 y 6									
$6 + 10 + 14 = 30$ $105000 : 30 = 3500$	$1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5670 : 21 = 270$									
$6 \cdot 3500 = 21000$ € $10 \cdot 3500 = 35000$ € $14 \cdot 3500 = 49000$ €	$270 \cdot 10 = 2700$ $270 \cdot 6 = 1620$ $270 \cdot 5 = 1350$									
Mezclas y aleaciones	<p>Mezclar distintas cantidades de productos, de distintos precios.</p> <p>La ley de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.</p>	<p>Una joya que pesa 245 g y contiene 195 g de plata, su ley es: $\frac{195}{245} = 0,795$</p>								
Interés simple y compuesto	El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo	<p>$C = 3600$; $r = 4,3\%$; $t = 8$ años</p> <p>$I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4$ €</p>								

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

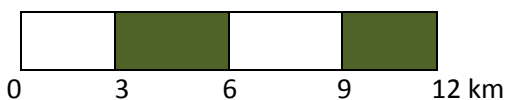
litros	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

- Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m², ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?
- Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?
- Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?
- Para tapizar cinco sillas he utilizado 0,6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?
- Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?
- Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?

8. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es $k = 1,8$, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15,9			0,01	
Magnitud B		6	0,1		10

9. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
10. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?
11. Si un litro de leche de 0,85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?
12. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1200 €?
13. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?
14. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
15. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?
16. Por liquidar una deuda de 35000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
17. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
18. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?
19. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?
20. Un mapa está dibujado a escala 1 : 800000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?
21. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?
22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:
- Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre
 - Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar
 - Talla de zapatos y precio de los mismos
 - Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen
 - Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado
 - Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse
 - Edad de una persona y estatura que tiene. h) Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla. l) Edad de una persona y número de amigos que tiene

26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?
27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:
- | | | | | | |
|---|----|------|---|-----|------|
| A | 20 | | 7 | | 10,8 |
| B | | 0,05 | | 0,3 | |
28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?
29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?
30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2,7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?
31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:
- | | | | | | | |
|---|----|---|-----|---|----|----|
| A | 24 | 8 | 0,4 | 6 | | 50 |
| B | 3 | 9 | 180 | | 20 | |
32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?
33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?
34. Si 15 operarios instalan 2500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5250 m de valla?
35. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?
36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.
37. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?
38. Repartir 4350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.
39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1,75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.
40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2,5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1,6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1,2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?
41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4,2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.
42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?
43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2350000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?
44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280,5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?
45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0,900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0,950 de ley y 20 g de 0,750 de ley?
46. ¿Qué capital hay que depositar al 3,5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?
47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25400 € al 1,4 % en 10 años?
48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74500 € al 3 % para obtener un interés de 2980 €?

49. Al 3 % de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63338,5 €. ¿De qué capital se trata?
50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?
51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

- a) 2000; 0,025; 20; 20000 b) 2000; 0,25; 2; 20000 c) 1000; 0,025; 10; 10000
2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:
- a) 2000 € b) 1900 € c) 1800 € d) 1500 €.
3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:
- a) 10 % b) 12,5 % c) 15,625 % d) 11,75 %
4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?
- a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas
5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

- a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500
6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:
- a) 24 t y 20 t b) 20 t y 24 t c) 24 t y 18 t d) 25 t y 20 t
7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2,7 cm equivalen a 0,81 km es:
- a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300
8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?
- a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos
9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0,85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:
- a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,049€
10. La ley de una aleación es 0,855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:
- a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g