CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES

En este primer capítulo vamos a repasar muchas cosas que ya conoces, como las operaciones con los números, representar los números en una recta, las potencias… Si todo eso lo dominas suficientemente, lo mejor es que pases muy deprisa por él, y dediques tu tiempo a otros capítulos que te resulten más nuevos. Sin embargo, seguro que hay pequeños detalles que sí pueden resultarte nuevos, como por ejemplo que los números irracionales, junto con los números racionales forman el conjunto de los *números reales*, y que a cada número real le corresponde un punto de la recta (propiedad que ya tenían los números racionales) y a cada punto de la recta le corresponde un número real. Por eso, a la recta numérica la vamos a llamar *recta real*.

Empezamos con un problema para que midas lo que recuerdas sobre operaciones con fracciones:

Actividades propuestas

1. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

1.1. Operaciones con números enteros, fracciones y decimales

Operaciones con números enteros

Recuerda que:

Los números **naturales** son: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3....\}$.

Existen ocasiones de la vida cotidiana en las que es preciso usar números diferentes de los números naturales. Fíjate en estos ejemplos:

Ejemplos:

- Si se tienen 20 € y se gastan 30 euros, se tendrá una deuda de 10 euros, es decir –10 €.
- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace –5 ºC.
- Al bajar en ascensor al sótano 3, has bajado al piso –3.

Los **números enteros** son una ampliación de los números **naturales** ($\mathbf{N}$). Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5… Los enteros **negativos** van precedidos del signo –: –1, –2, –3… El **cero** es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por $\mathbf{Z}$: $\mathbf{Z} = \{...–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3...\}$.

Recuerda que:

Para **sumar** (o restar) números enteros podemos sumar por un lado todos los números enteros positivos, y los negativos por otro, restando el resultado.

Ejemplo:

Si *a, b* y *c* son números enteros entonces:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Para **multiplicar** o dividir números enteros se tiene en cuenta la regla de los signos.

Ejemplo:

$$(+5) \cdot (+4) = +20 \quad (-3) \cdot (-5) = +15 \qquad (+5) \cdot (-4) = -20 \qquad (-6) \cdot (+5) = -30$$

Actividades propuestas

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) +11*ab* + (+7) · (+6*ab* – 8*ab*) e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]

3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

Operaciones con fracciones

Recuerda que:

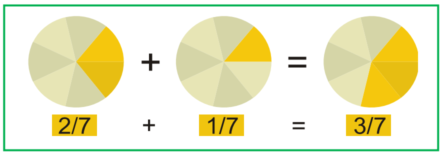
Una ***fracción*** es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto *m* como *n* son números enteros. Para referirnos a ella decimos *"m partido por n"*; *m* recibe el nombre de ***numerador*** y *n* el de ***denominador***.

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias**.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Para **sumar** o restar fracciones que tienen **el mismo denominador** se realiza la suma, o la resta, de los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

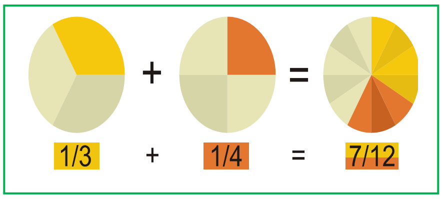
Para sumar o restar fracciones con **distinto denominador**, se reducen a común denominador, buscando el mínimo común múltiplo de los denominadores.



Ejemplos:

a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$



Los denominadores son diferentes, 3 y 4. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 3 nos da 4 y al hacerlo entre 4 obtenemos 3.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Actividades propuestas

4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

5. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Operaciones con expresiones decimales

Una **expresión decimal** consta de dos partes: su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma

Observa que: La coma se puede escribir arriba: 3'5, o abajo: 3,5, e incluso en Estados Unidos se utiliza un punto: 3.5. En este capítulo vamos a escribir la coma abajo.

Para **sumar o restar** expresiones decimales, basta conseguir que tengan el mismo número de cifras decimales.

Ejemplo: a) 24,7 + 83,15 – 0,05 = 24,70 + 83,15 – 0,05 = 107, 80 b) 53,39 – 56 + 0,06 = 53,45 – 56,00 = –2,55

Para **multiplicar** dos expresiones decimales, se multiplican ignorando la coma que posee cada una de ellas. Al resultado de ese producto se le pone una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Ejemplo: $5{,}7a \cdot 3{,}2a \cdot 7{,}14a = 130{,}2336a^3$

Para **dividir** expresiones decimales igualamos el número de cifras decimales de ambos números, y luego dividimos.

Ejemplo: $\frac{9{,}3}{4'81}=\frac{9{,}30}{4'81}=\frac{930}{481}=1{,}9$

Actividades propuestas

6. Realiza las operaciones:

a) $31{,}3+5{,}97$ b) $3{,}52\cdot 6{,}7$ c) $11{,}51-4{,}8$ d) $19{,}1-7{,}35$

e) $4{,}32+32{,}8+8{,}224$ f) $46{,}77-15{,}6+2{,}3$ g) $1{,}16\cdot 3{,}52$ h) $3{,}2\cdot 5{,}1\cdot 1{,}4$

i) $2{,}3\cdot 4{,}11\cdot 3{,}5$ j) $4\cdot(3{,}01+2{,}4)$ k) $5{,}3\cdot(12+3{,}14)$ l) $3{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

1.2. Números racionales. Fracciones y expresiones decimales

Toda expresión decimal exacta, o periódica, se puede poner como fracción.

Una expresión **decimal exacta** se convierte en la fracción cuyo numerador coincide con el número decimal, tras eliminar la coma, y el denominador es el número 1 seguido de tantos ceros como cifras tenía la parte decimal del número en cuestión.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo: $93{,}15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$

Para escribir en forma de fracción una expresión **decimal periódica**, como por ejemplo N = 1,725252525…, tenemos que conseguir dos números con la misma parte decimal para que al restar desaparezcan los decimales:

$$N = 1,7252525...$$
$$1000N = 1725,2525...$$
$$10N = 17,2525...$$
$$Si\ restamos: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Para ello multiplicamos a N de forma que la coma quede después del primer periodo, en este caso después de 1725. También multiplicamos a N de manera que la coma quede al principio del primer periodo, en este caso detrás de 17. Ahora 1000N y 10N tienen la misma parte decimal (infinita) que si restamos desaparece, y podemos despejar N.

Actividades propuestas

7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:
   a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23; d) 2,353535…..
   e) 87,2365656565….; f) 0,9999…..; g) 26,5735735735…..

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta, o periódica.

Recuerda que:

Si el denominador (de la fracción irreducible) sólo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 su expresión decimal es exacta.

Ejemplo:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0,025;\ ya\ que\ \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, y esto es general ya que siempre habrá una potencia de 10 que sea múltiplo del denominador si éste sólo contiene doses o cincos. Fíjate que el número de decimales es el mayor de los exponentes de 2 y 5.

Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Ejemplo:

- Si dividimos 1 entre 23 obtenemos un primer resto que es 10, luego otro que es 8 y seguimos, pero, ¿se repetirá alguna vez el resto y por lo tanto las cifras del cociente? La respuesta es que sí, seguro que sí, los restos son siempre menores que el divisor, en este caso del 1 al 22, si yo obtengo 22 restos distintos (como es el caso) al sacar uno más ¡tiene que repetirse!, es el llamado *Principio del Palomar*. Y a partir de ahí los valores del cociente se repiten. Por lo tanto la expresión decimal es periódica y el número de cifras del periodo es como máximo una unidad inferior al denominador (no siempre ocurre esto pero 1/23 tiene un periodo de 22 cifras, 1/97 lo tiene de 96 cifras, sin embargo 1/37 tiene un periodo de sólo 3 cifras.

Se llaman **números racionales** a aquellos cuya expresión decimal es finita o periódica, y se les representa por $\mathbf{Q}$. Acabamos de ver que se pueden escribir en forma de fracción por lo que se puede definir el conjunto de los números racionales como:

$$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

¿Por qué imponemos que el denominador sea distinto de cero? Observa que no tiene sentido una fracción de denominador 0.

Actividades propuestas

8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.
   a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11
9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

1.3. Números irracionales. Expresión decimal de los números irracionales

Existen otros números cuya expresión decimal es infinita no periódica. Ya conoces algunos: π, $\sqrt{2}$ … Cuando los griegos demostraron que existían números como $\sqrt{2}$, o como el número de oro, que no se podían poner en forma de fracción y que tenían, por tanto, infinitas cifras decimales no periódicas, les pareció algo insólito. Por eso estos números recibieron ese extraño nombre de "*irracionales*". No lo podían entender dentro de su filosofía. Lo interesante es que existe una longitud que mide exactamente $\sqrt{2}$, que es la diagonal de cuadrado de lado 1, o la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

El método para demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir en forma de fracción se denomina "reducción al absurdo" y consiste en suponer que sí se puede, y llegar a una contradicción. Este procedimiento sirve igual para **todas las raíces no exactas**, como con $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ...

Pero no vale para todos los irracionales. Para demostrar que π es un número irracional hay que estudiar mucho. Está relacionado con el interesante problema de la *cuadratura del círculo*. Fue demostrado a finales del siglo XVIII por Lambert. Hasta ese momento todavía se seguían calculando decimales para encontrar un periodo que no tiene.

Estos números cuya expresión decimal es infinita y no periódica se denominan **números irracionales**.

Se llaman **números reales** al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales.

Con estos números tenemos resuelto el problema de poder medir cualquier longitud. Esta propiedad de los números reales se conoce con el nombre de *completitud*.

A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Observa que también a cada número racional le corresponde un punto de la recta, pero no al contrario, pues $\sqrt{2}$ es un punto de la recta que no es racional.

Actividades propuestas

10. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1,4, pues $(1,4)^2$ es distinto de 2; no 1,41 pues $(1,41)^2$ es distinto de 2; ni 1,414, pues $(1,414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.
11. Halla la expresión decimal de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

1.4. Distintos tipos de números

Ya conoces distintos tipos de números:

Naturales ➔ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Son los números que se usan para contar y ordenar. El 0 no suele considerarse un número natural.

Enteros ➔ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Son los números naturales, sus opuestos y el cero. No tienen parte decimal, de ahí su nombre. Incluyen a los Naturales.

Notación:

$\in$ significa "pertenece a"

$\cup$ significa "unión"

$\subset$ significa "incluido en"

$\cap$ significa "intersección"

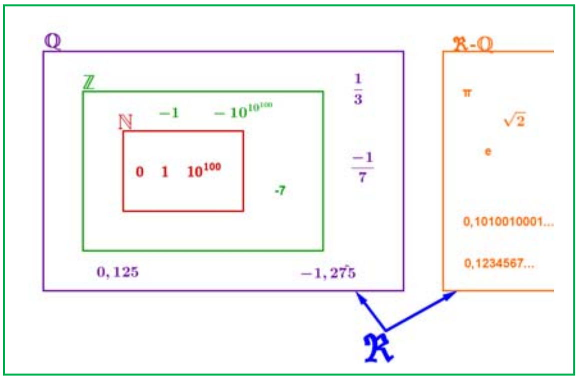
A los números que se pueden expresar en forma de cociente de dos números enteros se les denomina números **racionales** y se les representa por la letra $\mathbf{Q}$. Por tanto

Racionales ➔ $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Los números racionales incluyen a los Enteros.

También contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0,12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7,01252525…) pues pueden escribirse en forma de fracción.

Los números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \pi \ldots$ son los números **irracionales**, y tienen una expresión decimal infinita no periódica. Junto con los números racionales forman el conjunto de los números reales. Por tanto



Irracionales ➔ $\mathbf{I} = \mathfrak{R} - \mathbf{Q}$.

Son números irracionales aquellos números que **no** pueden ponerse como fracción de números enteros. Hay más de lo que podría parecer (de hecho hay más que racionales ¡!), son todos aquellos que tienen una expresión decimal que no es exacta ni periódica, es decir, **infinitas cifras decimales y sin periodo**. Ejemplos: 17,6766766676… que me lo acabo de inventar o 0,1234567891011… que se lo inventó Carmichael. Invéntate uno, busca en Internet y si no lo encuentras, pues es tuyo (por ahora ☺)

Reales ➔ $\mathfrak{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Es la unión de los números racionales y de los irracionales.

Tenemos por tanto que:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \Re.$$
$$\mathbf{I} \subset \Re$$

¿Son estos todos los números?

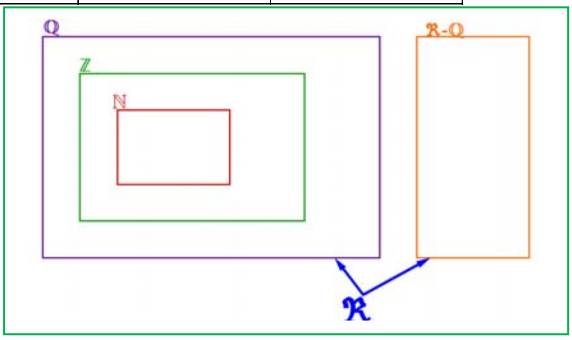
No, los reales forman parte de un conjunto más amplio que es el de los Números Complejos **C** (en 1º de bachillerato se estudian en la opción de Ciencias).

Actividades propuestas

12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	**N**	**Z**	**Q**	**I**	$\Re$
–7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212…					
π					
1/2					
1,99999…					

13. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:



14. ¿Puedes demostrar que 4,99999… = 5?, ¿cuánto vale 2,5999…? Escríbelos en forma de fracción.
15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?

2. POTENCIAS

2.1. Repaso de las potencias de exponente natural

Recuerda que:

Para calcular la **potencia** de exponente un número natural y de base un número cualquiera se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplos:

a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$ b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$ d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.
Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

$$(-2)^2 = +4$$
$$(-2)^3 = -8$$

Ejemplos:

$(-5)^2 = +25$; $(-5)^3 = -125$

Actividades propuestas

16. Calcula:

a) $(+1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

2.2. Potencias de exponente fraccionario

Si el exponente es, por ejemplo, –2, no sabemos multiplicar algo *menos dos* veces. Tampoco sabemos multiplicar algo por si mismo *cero* veces. Ahora la definición anterior no nos sirve. Las definiciones que se van a dar van a mantener las propiedades que conocemos de las operaciones con potencias de exponente natural, que van a seguir siendo válidas.

Recuerda

Siempre se verifica que:

$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

$c^m : c^n = c^{m-n}$

$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$

Se define: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y se define $a^0 = 1$

En efecto, $\frac{a^3}{a^3} = 1$ y $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^0 = 1$.

También, $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ y $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Actividades propuestas

17. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot ((-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$ c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4\right)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

2.3. Operaciones con radicales

La raíz enésima de un número *a* es un número *x* que al elevarlo a *n*, da como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

La **raíz cuadrada** de un número real no negativo *a* es un *único* número no negativo *x* que elevado al cuadrado nos da *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo $\sqrt[3]{-1}$ = –1 sí existe, pues (–1) · (–1) · (–1) = –1.

Observa que: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, por lo que se define:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Ejemplo:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podemos **operar** con radicales utilizando las mismas propiedades de las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- x2/3 · y1/3 = $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$
- $\dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \dfrac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

> **Recuerda**
>
> Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.
>
> 10 = $\sqrt{100}$ = $\sqrt{64+36}$ que es distinto de:
>
> $\sqrt{64}$ + $\sqrt{36}$ = 8 + 6 = 14.

En ocasiones es posible **extraer factores** de un radical.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Actividades propuestas

19. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

20. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8000}$ factorizando previamente los radicandos

21. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

22. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

23. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \le a \le 9$$

Si el exponente n es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente n es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

- $7810000000000 = 7{,}81 \cdot 10^{12}$ $\qquad 0{,}000000000038 = 3{,}8 \cdot 10^{-11}$
- $500.000 = 5 \cdot 10^5$ $\qquad 0{,}00002 = 2 \cdot 10^{-5}$
- Hay galaxias que están a 200.000.000.000.000 km de nosotros, y lo escribimos $2 \cdot 10^{14}$
- La masa de un electrón es aproximadamente de 0,000000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como $9{,}11 \cdot 10^{-28}$

Actividades resueltas

- En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de lo grande que es, podemos usar la notación científica.

Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 92233720368547758089223372036854775808 que da un poco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16}, 2^{32} y 2^{64}

$2^{16} = 65536 \approx 6{,}5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4294967296 \approx 4{,}29 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18446744073709551616 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$

Actividades propuestas

24. Escribe en notación científica:

a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046

Operaciones con notación científica

Para realizar **sumas y restas**, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2{,}3 \cdot 10^6 - 6{,}5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5: $4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6{,}5 \cdot 10^5$. Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6{,}5) = 4016{,}5 \cdot 10^5 = 4{,}0165 \cdot 10^8$

El **producto** (o el **cociente**) de dos expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar (o de dividir) los números decimales y sumar (o restar) los exponentes de base 10.

Ejemplo:

- $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}36 \cdot 10^6 = (2{,}5 \cdot 1{,}36) \cdot 10^{5+6} = 3{,}4 \cdot 10^{11}$
- $5{,}4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5{,}4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1{,}35 \cdot 10^2$
- Para hacer el cociente para calcular 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica:
  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1{,}8 \cdot 10^{19} / 2 = 0{,}9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

25. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.

26. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

Actividades propuestas

27. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0{,}000481 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5{,}4 \cdot 10^6 + 7{,}2 \cdot 10^5$ c) $(2{,}9 \cdot 10^5) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{-3})$

d) $(3{,}8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^6) \cdot (8{,}1 \cdot 10^{-4})$ e) $(4{,}8 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6{,}28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2{,}9 \cdot 10^2) : (3{,}98 \cdot 10^{-7})$

3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES

3.1. Representación de números enteros y racionales

Recuerda que:

Para representar un número entero en la recta numérica se traza una recta horizontal en la que se marca el cero, que se denomina origen, y se marca el 1. Se divide la recta en segmentos iguales, de longitud 1. Se representan los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

De esta forma quedan ordenados los números enteros. Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado es menor.

Ejemplo 6:

- Representa en una recta numérica y ordena los números enteros siguientes:

  –2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 y 1

  –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Orden de menor a mayor: –7 < –3 < –2 < –1 < 0 < 2 < 4 < 8.

Orden de mayor a menor: 8 > 4 > 2 > 0 > –1 > –2 > –3 > –7.

Actividades propuestas

28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 y 0.
29. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de mayor a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –7.
30. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y *Gauss* entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?
31. Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: 10, −4, −7, 5, −8, 7, −6, 0, 8.

Para representar una fracción en la recta numérica:

Distinguimos entre fracciones propias e impropias.

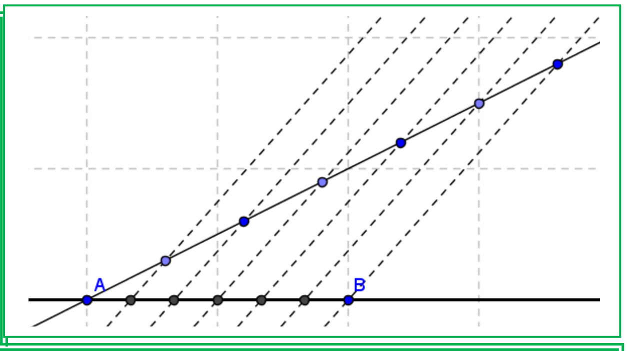
En cualquier caso debemos recordar cómo se divide un segmento en partes iguales.

Actividades resueltas

- Si la fracción es **propia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), por ejemplo $\frac{5}{6}$ bastará con dividir la primera unidad en 6 partes iguales y tomar 5. En caso de ser negativa contaremos hacia la izquierda. (Ver figura)

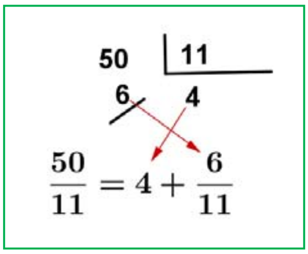
Dividir un segmento en parte iguales

Para dividir el segmento AB en por ejemplo 6 partes iguales, trazamos por A una línea auxiliar oblicua cualquiera, abrimos el compás una abertura cualquiera y marcamos 6 puntos en la recta anterior a distancia igual. Unimos el último punto con B y trazamos paralelas que pasen por los puntos intermedios de la recta oblicua. Por el *Teorema de Tales*, el segmento AB ha quedado dividido en 6 partes iguales. Para representar 5/6, tomamos 5 de esas partes.



Normalmente no te exigirán que lo hagas tan exacto, lo harás de forma aproximada, pero ten cuidado en que las partes parezcan iguales.

- Si la fracción es **impropia** (numerador mayor que denominador y por tanto valor mayor que 1) haremos la división entera (sin decimales) quedándonos con el cociente y el resto. Esto nos permite ponerla en forma mixta (suma de un entero y una fracción propia). Así por ejemplo: $\frac{50}{11} = 4 + \frac{6}{11}$ ya que al dividir 50 entre 11 obtenemos 4 de cociente y 6 de resto. *El cociente es la parte entera y el resto el numerador de la fracción propia.*



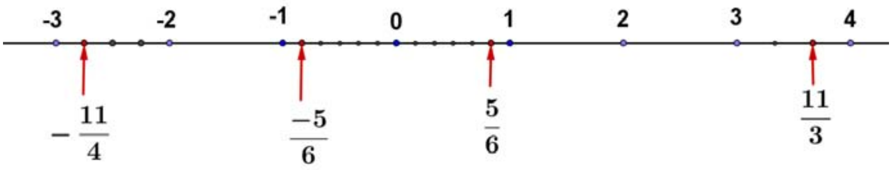
Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Para representarla sólo nos tenemos que ir donde dice la parte entera (4) y la unidad siguiente (la que va del 4 al 5) la dividimos en 11 partes iguales y tomamos 6.

- Otro ejemplo: $\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}$, pues la división da 2 de cociente y 3 de resto.

Nos vamos al 2, dividimos la unidad siguiente (del 2 al 3) en 7 partes iguales y tomamos 3.

- En caso de ser negativa: $-\frac{11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, se hará igual pero contando hacia la izquierda. Nos vamos al –2, la unidad que va del –2 al –3 se divide en 4 partes y tomamos 3 (pero contando del –2 al –3 ¡claro!).



Actividades propuestas

32. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números: $\frac{7}{6};\frac{-17}{4};2,375;-3,\overset{\frown}{6}$

33. Representa en la recta numérica 6'5; 6'2; 3'76; 8'43; 8'48; 8'51 y 8'38.

34. Ordena los siguientes números de mayor a menor: +1,47; –4,32; –4,8; +1,5; +1,409; 1,4, –4,308.

3.2. Representación en la recta real de los números reales:

Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

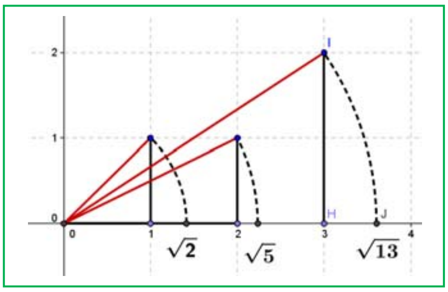
Esta segunda parte, es la propiedad más importante de los números reales y la que los distingue de los números racionales.

Veamos como representar de forma exacta **algunos** números reales:

Representación en la recta de las raíces cuadradas:

Para representar raíces cuadradas usamos el *Teorema de Pitágoras*. Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa es *h* y los catetos son *a*, *b* tenemos que $h^2=a^2+b^2 \Rightarrow h=\sqrt{a^2+b^2}$.

Actividades resueltas



- Representa en la recta $\sqrt{2}$

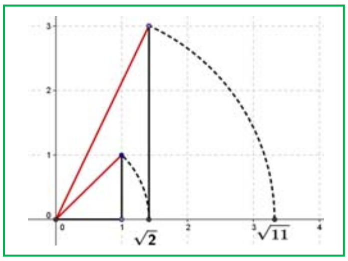
Si *a* = *b* = 1 tenemos que $h=\sqrt{2}$. Sólo tenemos que construir un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, su hipotenusa mide $\sqrt{2}$, (la diagonal del cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$). Ahora utilizando el compás, llevamos esa distancia al eje X (ver figura).

- Representa en la recta $\sqrt{5}$

Como $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$ sólo hay que construir un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1, y su hipotenusa mide $\sqrt{5}$.

¿Has pillado el truco?, el radicando hay que expresarlo como suma de 2 cuadrados. El triángulo rectángulo tendrá como catetos esos dos números.

- Así, para representar $\sqrt{13}$, expresamos 13 como suma de 2 cuadrados: $13=9+4=3^2+2^2 \Rightarrow \sqrt{13}=\sqrt{3^2+2^2}$ luego en un triángulo rectángulo de lados 3 y 2 la hipotenusa será $\sqrt{13}$.
- ¿Pero, y si el número no puede ponerse como suma de 2 cuadrados?, por ejemplo el 11 (¡siempre complicando las cosas! ☹).



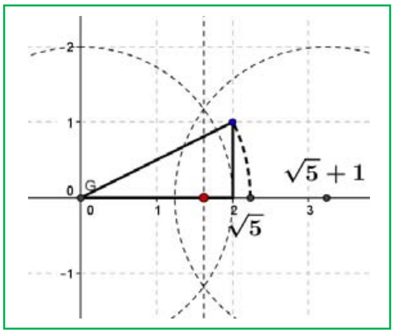
Habrá que hacerlo en 2 pasos. 11 = 2 + 9, ¿hay algún número cuyo cuadrado sea 2?, por supuesto que sí, $\sqrt{2}$. Por tanto $\sqrt{11}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2}$, tenemos que hacer un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 3. Para ello primero se construye $\sqrt{2}$ como antes y se traza una perpendicular de longitud 3 (ver figura).

¿Pueden dibujarse ya así todas las raíces?, no. Hay algunas para las que hay que hacer más pasos ($\sqrt{7}$ por ejemplo requiere 3), pero mejor lo dejamos aquí, ¿no?

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Representa en la recta numérica de forma exacta el número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



¿Has oído hablar del número de oro?

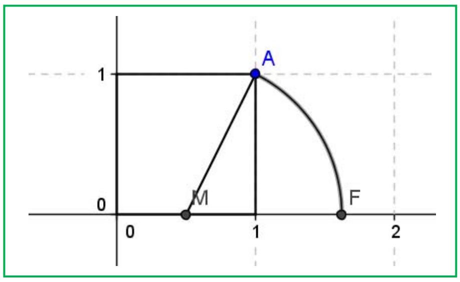
El Número de Oro (o Razón Áurea o Proporción Armónica o Divina Proporción) es igual a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- ¿Cómo lo representamos en la recta?

Sólo hay que construir $\sqrt{5}$ como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidad con el compás) y dividir entre 2 hallando el punto medio (con la mediatriz), hecho.

- Otra forma distinta:

Construimos un cuadrado de lado 1 (¿un qué?, ¡un lo que quieras!). Hallamos el punto medio del lado inferior (M) y llevamos la distancia MA con el compás al eje horizontal, OF es el número de oro.



Veamos:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Actividades propuestas

35. Busca rectángulo áureo y espiral áurea en Internet.

36. Ya de paso busca la relación entre el *Número de Oro* y la *Sucesión de Fibonacci*.

37. Busca en *youtube* "algo pasa con phi" y me cuentas.

38. Representa en la recta numérica de forma exacta: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Densidad de los números reales

Los números reales son **densos**: entre cada dos números reales hay infinitos números reales en medio.

Eso es fácil de deducir, si *a*, *b* son dos números con *a* < *b* sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, es decir, la media está entre los dos números. Como esto podemos hacerlo las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los racionales son también densos en los números reales, así como los irracionales.

Actividades propuestas

39. Calcula 3 números reales que estén entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y 1.

40. Halla 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}\ y\ 1,5$

41. Halla 5 números irracionales que estén entre 3,14 y π

3.3. Herramienta informática para estudiar la proporción áurea

En esta actividad se va a utilizar el programa *Geogebra* para realizar un estudio de la proporción áurea.

Un segmento está dividido en dos partes que están en proporción áurea si la razón entre la longitud del segmento y la longitud de la parte mayor coincide con la razón entre la longitud de la parte mayor y la de la parte menor.

Actividades resueltas

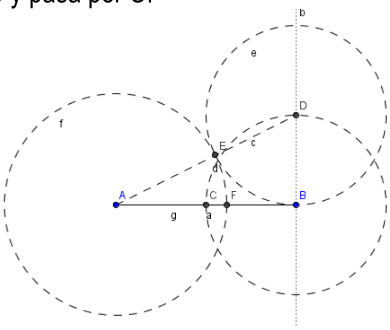
- *Utiliza Geogebra para dividir un segmento en dos partes que estén en proporció áurea.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Determina con **Nuevo punto** los puntos *A* y *B* y dibuja el segmento, *a*, que los une.
- Traza un segmento *BD* perpendicular al segmento *AB* en el punto *B*, cuya longitud sea la mitad de *AB,* puedes seguir las siguientes instrucciones:
  - Calcula el **Punto medio o centro** del segmento *AB* y llámalo *C*.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

- ➢ Dibuja con **Circunferencia con centro y punto que cruza** la que tiene centro en *B* y pasa por *C*.
- ➢ Traza la **Recta Perpendicular** al segmento *AB* que pase por *B*.
- ➢ Define *D* como el **Punto de Intersección** entre esta recta y la circunferencia.



- Dibuja el segmento *AD* y una circunferencia con centro *D* que pase por *B*. Sea *E* el **Punto de Intersección** de esta circunferencia con el segmento *AD*.
- Con centro en *A* traza la circunferencia que pasa por *E* y determina el **punto de Intersección**, *F*, de esta circunferencia con el segmento *AB*.
- Traza el segmento, *g*, que une los puntos *A* y *F*.
- Comprueba que el punto *F* divide al segmento *AB* en dos partes que están en proporción áurea:
  - ➢ Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**.
  - ➢ Calcula en la línea de **Entrada** los cocientes *a/g* y *g/(a-g).*

Observa en la **Ventana algebraica** que estos valores coinciden, has calculado un valor aproximado del número de oro, Φ.

- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales *A* o *B* y comprueba que el cociente entre las longitudes de los segmentos *AF* y *FB* permanece constante.
- Para visualizar mejor la construcción puedes dibujar los elementos auxiliares con trazo discontinuo, eligiendo en el menú contextual, **Propiedades** y **Estilo de trazo**.

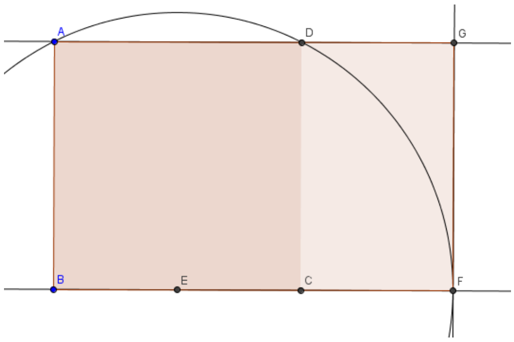
Un rectángulo es áureo si sus lados están en proporción áurea.

Si a un rectángulo áureo le quitamos (o le añadimos) un cuadrado obtenemos un rectángulo semejante al de partida y por lo tanto también áureo.

Utiliza Geogebra para dibujar un rectángulo áureo.

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Define dos puntos *A* y *B* que van a ser los extremos del lado menor del rectángulo y con la herramienta **polígono regular** dibuja, a partir de los puntos *A* y *B*, el cuadrado *ABCD* y oculta los nombres de los lados con la herramienta **Expone/Oculta rótulo**.



- Calcula el **Punto medio**, *E*, del lado *BC*. Con centro en *E* dibuja la **Circunferencia** con centro en *E* que pasa por *A*.
- Traza la recta, *a*, que pasa por *BC* y define como *F* el **Punto de intersección** entre esta recta y la circunferencia.
- Dibuja la **Recta perpendicular** a la recta *a* que pasa por *F*, y la **recta** que pasa por los puntos *A* y *D*, llama *G* al **Punto de intersección** de estas rectas y define con **Polígono** el rectángulo *ABFG*.
- En la ventana algebraica aparecen las longitudes de los lados del rectángulo como *f* y *g*, introduce en la línea de **Entrada** *g / f* y observa en esta ventana que aparece el valor *e* que es una aproximación al número áureo. Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales.**
- Dibuja el **segmento** *CF*, en la ventana algebraica aparece su longitud, *h*, introduce en la línea de **Entrada** *f / h*, observa que este cociente coincide con *g / f* y es una aproximación del número áureo.
- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales *A* o *B* y observa que el cociente entre las longitudes de los lados de los rectángulos es constante.

El rectángulo *ABFG* es áureo ya que el cociente entre la longitud de su lado mayor y la del menor es el número de oro, además el rectángulo *DCFG*, que se obtiene al quitar un cuadrado de lado el menor del rectángulo, es también áureo y por lo tanto semejante al primero.

Crea tus propias herramientas con Geogebra. Crea una que dibuje rectángulos áureos.

Se va a crear una herramienta que a partir de dos puntos *A* y *B* dibuje el rectángulo áureo en el que el segmento *AB* es el lado menor.

- En la figura anterior oculta el nombre de los puntos *C, D, E, F* y *G* con la herramienta **Expone/Oculta rótulo** haciendo clic con el ratón sobre ellos, en el área de trabajo o en la ventana algebraica.
- Activa en el menú **Herramientas** , la opción **Creación de nueva herramienta** y define:

Objetos de salida: el polígono cuadrado, el polígono rectángulo y los puntos *C, D, F,* y *G*.

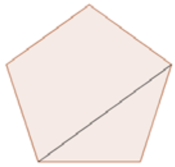
Objetos de entrada: los dos puntos iniciales *A* y *B*.

Y elige como **nombre de la herramienta** *rectanguloaureo*. Observa que aparece en la barra de herramientas.

En la opción **Manejo de útiles** del menú **Herramientas** graba la herramienta creada como *rectanguloaureo* , que se guarda como *rectanguloaureo.ggt*

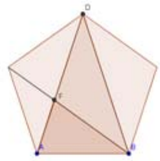
Utiliza la herramienta **Desplazamiento de la zona gráfica** para ir a una parte vacía de la pantalla y comprobar que la herramienta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

Actividades propuestas



42. Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.
43. Calcula con Geogebra una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos.

44. Comprueba que los triángulos *ABD* y *ABF* de la figura son semejantes y calcula aproximadamente con *Geogebra* su razón de semejanza.



45. Calcula con *Geogebra* el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

Como ya sabemos entre dos números reales hay infinitos números. Hay una notación especial para referirse a esos infinitos números que deberás dominar para éste y futuros cursos.

4.1. Intervalos. Tipos y significado

(Del lat. *intervallum*): 2. m. Conjunto de los valores que toma una magnitud entre dos límites dados. RAE.

Definición:

Un subconjunto de $\Re$ es un intervalo si para cualquier par de elementos, *a* y *b*, de ese subconjunto se verifica que si $a < x < b$ entonces *x* debe pertenecer a dicho subconjunto.

Vamos a estudiar en este apartado intervalos acotados de distintos tipos: los intervalos abiertos, los intervalos cerrados y los intervalos semiabiertos (o semicerrados)

Intervalos abiertos:

Si nos queremos referir al conjunto de los números que hay entre dos valores pero sin contar los extremos, usamos un **intervalo abierto**

Ejemplo:

- Los números superiores a 2 pero menores que 7 se representan por (2, 7) y se lee "*intervalo abierto de extremos 2 y 7*". A él pertenecen infinitos números como 2,001; 3,5; 5; 6,999; … pero no son de este conjunto ni el 2 ni el 7. Eso representan los paréntesis, que entran todos los números de en medio pero no los extremos.

Ejemplo:

- Los números positivos menores que 10, se representan por (0, 10), el intervalo abierto de extremos 0 y 10. Fíjate que 0 no es positivo, por lo que no entra y el 10 no es menor que 10, por lo que tampoco entra.

Nota: No se admite poner (7, 2), ¡el menor siempre a la izquierda!

También hay que dominar la expresión de estos conjuntos usando desigualdades, prepárate: $(2, 7) = \{x \in \Re / 2 < x < 7\}$.

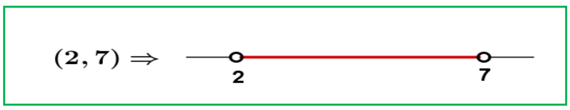
Traducimos: Las llaves se utilizan para dar los elementos de un conjunto, dentro de ellas se enumeran los elementos o se da la propiedad que cumplen todos ellos. Se utiliza la *x* para denotar a un número real, la / significa "tal que" (en ocasiones se utiliza un punto y coma ";" o una raya vertical "|") y por último se dice la propiedad que cumplen mediante una doble desigualdad. Así que no te asustes, lo de arriba se lee: *los números reales tal que son mayores que 2 y menores que 7*.

Usaremos indistintamente varias de estas nomenclaturas para que todas te resulten familiares.

Es necesario dominar este lenguaje matemático puesto que la frase en castellano puede no entenderse en otros países pero te aseguramos que eso de las llaves y la | lo entienden todos los estudiantes de matemáticas del mundo (bueno, casi todos).

El otro ejemplo: $(0, 10) = \{x \in \Re / 0 < x < 10\}$.

Por último la **representación gráfica**:



Se ponen **puntos sin rellenar** en los extremos y se resalta la zona intermedia.

En ocasiones también se pueden poner en el 2 y en el 7 paréntesis: "( )", o corchetes al revés: "] [".

Pregunta: ¿Cuál es número que está más cerca de 7, sin ser 7?

Piensa que 6,999… = 7 y que entre 6,999 y 7 hay "muchos, muchísimos …" números.

Nota:

En algunos textos los intervalos abiertos se representan así:]2, 7[lo cual tiene algunas ventajas como que los estudiantes no confundan el intervalo (3, 4) con el punto del plano (3, 4), que aseguramos que ha ocurrido (pero tú no serás uno de ellos ¿no?), o la fastidiosa necesidad de poner (2,3 ; 3,4) porque (2,3,3,4) no lo entendería ni Gauss.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Intervalos cerrados:

Igual que los abiertos pero ahora sí pertenecen los extremos.

Ejemplo:

- El intervalo de los números mayores o iguales que –2 pero menores o iguales que 5. Ahora el –2 y el 5 sí entran. Se hace igual pero poniendo corchetes: [–2, 5].

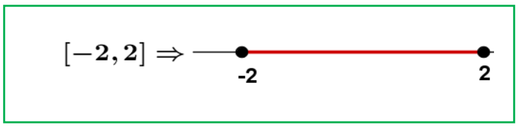
En forma de conjunto se escribe: $[-2, 5] = \{x \in \mathfrak{R};\ -2 \le x \le 5\}$.

Fíjate que ahora ponemos $\le$ que significa "*menor o igual*".

Ejemplo:

- El intervalo de los números cuyo cuadrado no es superior a 4. Si lo piensas un poco verás que son los números entre el –2 y el 2, ambos incluidos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Por tanto:

$$[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R};\ -2 \le x \le 2\}.$$



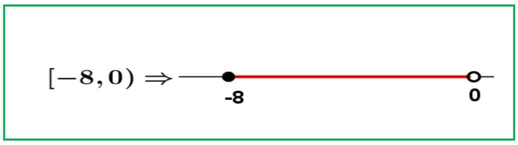
La representación gráfica es igual pero poniendo **puntos rellenos**. En ocasiones también se puede representar gráficamente con corchetes: "[ ]".

Intervalos semiabiertos (o semicerrados, a elegir)

Por supuesto que un intervalo puede tener un extremo abierto y otro cerrado. La notación será la misma.

Ejemplo:

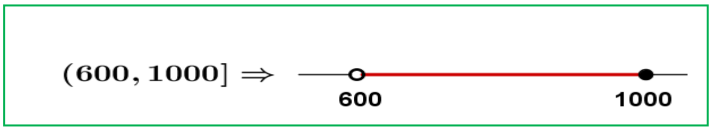
- Temperatura negativa pero no por debajo de –8 ºC:



$$[-8, 0) = \{x \in \mathfrak{R};\ -8 \le x < 0\}.$$

Es el intervalo cerrado a la izquierda de extremos –8 y 0.

- Números superiores a 600 pero que no excedan de 1000.



$$(600, 1000] = \{x \in \mathfrak{R};\ 600 < x \le 1000\}.$$

Es el intervalo cerrado a la derecha de extremos 600 y 1000.

4.2. Semirrectas

Muchas veces el conjunto de interés no está limitado por uno de sus extremos.

Ejemplo:

- Los números reales positivos: No hay ningún número positivo que sea el mayor. Se recurre entonces al símbolo ∞ y se escribe: $(0, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid x > 0\}$.

Nótese que es equivalente poner $x > 0$ que poner $0 < x$, se puede poner de ambas formas.

Ejemplo:

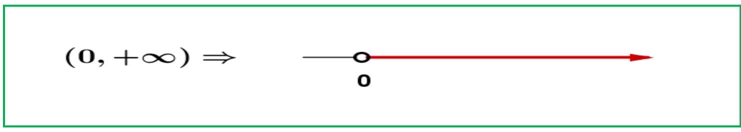
- Números no mayores que 5: $(-\infty, 5] = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \le 5\}$.

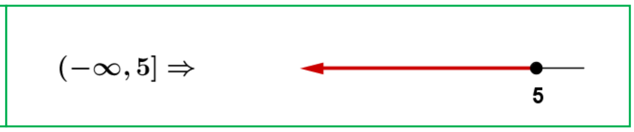
Aquí el 5 sí entra y por eso lo ponemos cerrado ("no mayor" equivale a "menor o igual")

Ejemplo:

- Solución de $x > 7$: $(7, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid x > 7\}$.

  Nota: **El extremo no acotado siempre se pone abierto**. No queremos ver esto: $(7, +\infty]$





Las semirrectas también son intervalos. Son intervalos no acotados.

Incluso la recta real es un intervalo:

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathfrak{R}.$$

Es el único intervalo no acotado ni superiormente ni inferiormente.

Observa que con esta nomenclatura estamos diciendo que $-\infty$ y que $+\infty$ no son números reales.

4.3. Entornos

Es una forma especial de representar los intervalos abiertos.

Se define el entorno de centro a y radio r y se denota $E(a, r)$ (otra forma usual es $E_r(a)$) como el conjunto de números que están a una **distancia de** a **menor que** r.

$$E(a, r) = (a - r, a + r)$$

Observa que un entorno es siempre un intervalo abierto y acotado.

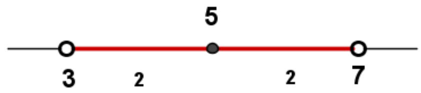
Con un ejemplo lo entiendes mejor:

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 a una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5 – 2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3, 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.

$E(5,2) = (3,7) \Rightarrow$



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

Ejemplo: E(2, 4) = (2 – 4, 2 + 4) = (–2, 6)

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

- Si tengo el intervalo abierto (3, 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6,5 que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10 – 3) : 2 = 3,5 es el radio (la mitad del ancho).

Por tanto (3, 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

El intervalo (*b*, c) es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo: El intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}) = E(-3,5;4,5)$.

Actividades propuestas

46. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Porcentaje superior al 15 %. b) Edad inferior o igual a 21 años.

c) Números cuyo cubo sea superior a 27. d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras.

e) Temperatura inferior a 24 ºC. f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3.

g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

47. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos: a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0,001)

48. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos: a) (1, 7) b) (–5, –1) c) (–4, 2)

49. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realiza las operaciones: a) (24,67 + 6,91)3,2 b) 2(3,91 + 98,1) c) 3,2(4,009 + 5,9)4,8

4. Halla el valor exacto de $\frac{0,\overset{\frown}{4}}{0,4}$ sin calculadora.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica: $\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$

6. Halla 3 fracciones *a*, *b*, *c* tal que $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$

7. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a explicar el motivo?

8. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

9. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

    2,73535…; $\pi - 2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100}; $\frac{102}{34}$; –2,5; 0,1223334444…

11. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

    a) $\mathbf{Q} \cap (\mathfrak{R} - \mathbf{Q}) = \{0\}$ b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$
    c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.
    d) $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$ e) 1/47 tiene expresión decimal periódica.

12. Pon ejemplos que justifiquen:

    a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.
    b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

13. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

14. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

15. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ m.

16. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

Potencias

23. Calcula:

    a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

24. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$ c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : -5/4)^{-4}$

25. Calcula: a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\frac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\frac{3^2 \cdot \frac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-25}{6}\right)^3}{\left(\frac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrae los factores posibles en cada radical:

    a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

28. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

29. Simplifica la expresión: a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35000000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

Representación en la recta real

33. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y Gauss entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de años hay entre ambas fechas?

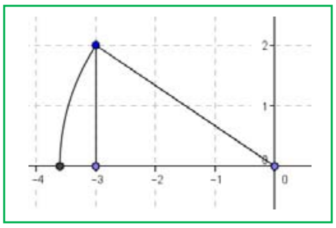
34. Representa de forma exacta en la recta numérica: –2,45; 3,666…

35. Sitúa en la recta real los números 0,5; 0,48; 0,51 y 0,505.

36. Ordena los siguientes números de mayor a menor: 2,4; –3,62; –3,6; 2,5; 2,409; –3,9999…

37. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números: $\frac{2}{3}; \frac{-3}{5}; \frac{5}{2}; 1{,}256; 3{,}\hat{5}$

38. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?



39. Representa de forma exacta en la recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5}; \frac{\sqrt{10}}{2}$

40. Halla 5 números racionales que estén entre 3,14 y π.

Intervalos

41. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

    a. (–5, 5] b. $\{x \in \mathfrak{R} \mid -2 < x \leq 7\}$.
    c. $\{x \in \mathfrak{R} \mid x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

42. Halla: a. (2, 4] U (3, 5] b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

43. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.

44. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:

    a. (0 , 8) b. (–6 , –2) c. $(2, +\infty)$

45. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:

    a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. E(1, 2) d. E(0, 1)

46. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

47. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

48. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

Varios

49. Un numero irracional tan importante como Pi es el número "e". $e \approx 2,718281828...$ que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* se hace muy, pero que muy grande. Coge la calculadora y dale a *n* valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, …

    Apunta los resultados en una tabla.

50. Otra forma de definir *e* es $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$

    Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo: 4! = 4·3·2·1 = 24, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No te preocupes, que la tecla "!" está en la calculadora. ¿Puedes calcular e con 6 cifras decimales correctas? **Nota:* Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta *n* = ¿?

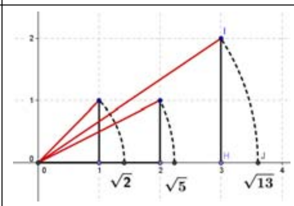
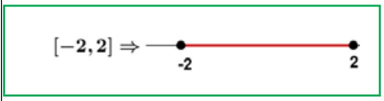
51. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

Masa de un electrón	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos
Masa de la Tierra	$5,983 \cdot 10^{24}$ kilogramos
Masa del Sol	$1,99 \cdot 10^{30}$ kilogramos
Masa de la Luna	$7,3 \cdot 10^{22}$ kilogramos

52. Tomando $1,67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa de un protón y $1,2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, y suponiéndolo esférico, calcula: a) su volumen en cm³ (Recuerda el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$. b) Encuentra el peso de un centímetro cúbico de un material formado exclusivamente por protones. c) Compara el resultado con el peso de un centímetro cúbico de agua (un gramo) y de un centímetro cúbico de plomo (11,34 gramos).

50. **Pista:* 600,222333€ ¿puede ser un sueldo?

RESUMEN

		Ejemplos
Conjuntos de números	Naturales ➔ N = {1, 2, 3, …}; Enteros ➔ Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …} Racionales ➔ Q = $\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; Irracionales ➔ I = $\Re$ – Q; $\Re$= Q∪I	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ *x* = 1,7252525… = 854/495
Números racionales	Su expresión decimal es exacta o periódica.	2/3; 1,5; 0,333333333….
Representación en la recta real	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	
N. Reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0,333333; π; $\sqrt{2}$
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos no pertenecen al intervalo	(2, 7) = {*x* ∈$\Re$/ 2 < *x* < 7}. 
Intervalo cerrado	Los extremos SI pertenecen al intervalo	[–2, 2] = {*x* ∈$\Re$; –2 ≤ x ≤ 2} 

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1) Indica qué afirmación es falsa. El número –0,3333333… es un número

a) real b) racional c) irracional d) negativo

2) Operando y simplificando la fracción $\frac{a^2-4a+4}{a-2}:\frac{a-2}{a+3}$ se obtiene:

a) a + 3 b) 1/(a + 3) c) a – 2 d) 1/(a – 2)

3) La expresión decimal 0,63636363…. Se escribe en forma de fracción como

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4) Al simplificar $\sqrt{2}\,(7\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{2})$ obtienes:

a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}\,(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

5) Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150, 7/50 tienen una expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

6) El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:

a) (–∞, –2) b) (–∞, –2] c) (–2, +∞) d) (–∞, –2[

7) El entorno de centro –2 y radio 0,7 es el intervalo:

a) (–3,7, –2,7) b) (–2,7, –1,3) c) (–3,3, –2,7) d) (–2,7, –1,3]

8) El intervalo (–3, –2) es el entorno:

a) E(–2'5; 1/2) b) E(–3'5; –0,5) c) (–3'5, 1/2) d) (–2'5; –0,5)

9) Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10) Al efectuar la operación 0,000078 + 2,4 · 10^{-5} se obtiene:

a) 3,6 · 10^{-10} b) 1,8912 · 10^{-10} c) 10,2 · 10^{-5} d) 18,72 · 10^{-5}

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF