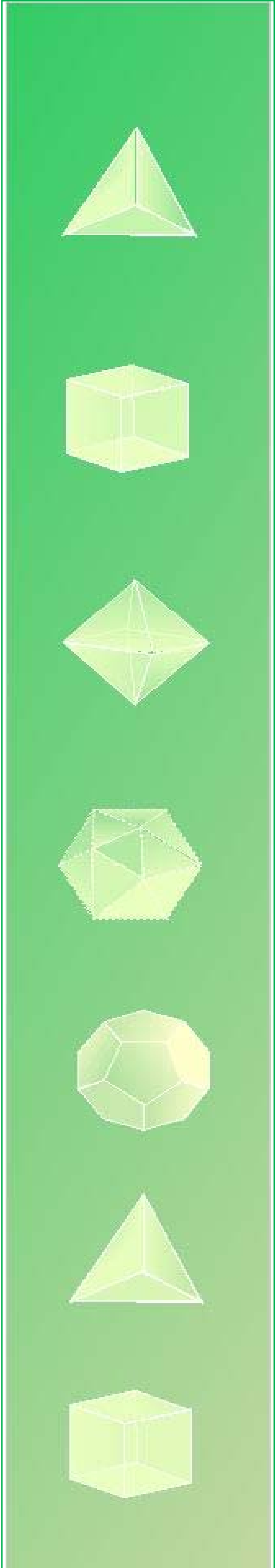


Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas:

4º A de ESO
Actividades y ejercicios

ÍNDICE:

LibrosMareaVerde.tk
www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde de Matemáticas (VVAA).

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y VVAA (anteriores)

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES

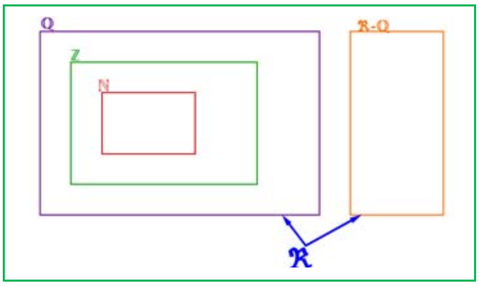
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

2. Realiza las siguientes operaciones:
   a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)
   d) +11ab + (+7) · (+6ab – 8ab) e) –7a^2b – [+4a^2b – (–6a^2b) : (+6)] f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]
3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:
   a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50
   c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)
4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:
   a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$
   e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$
5. Simplifica las siguientes fracciones:
   a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$
6. Realiza las operaciones:
   a) $31{,}3+5{,}97$ b) $3{,}52\cdot 6{,}7$ c) $11{,}51-4{,}8$ d) $19{,}1-7{,}35$
   e) $4{,}32+32{,}8+8{,}224$ f) $46{,}77-15{,}6+2{,}3$ g) $1{,}16\cdot 3{,}52$ h) $3{,}2\cdot 5{,}1\cdot 1{,}4$
   i) $2{,}3\cdot 4{,}11\cdot 3{,}5$ j) $4\cdot(3{,}01+2{,}4)$ k) $5{,}3\cdot(12+3{,}14)$ l) $3{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$
7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:
   a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23; d) 2,353535…..
   e) 87,2365656565….; f) 0,9999…..; g) 26,5735735735…..
8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.
   a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11
9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.
10. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1,4, pues $(1{,}4)^2$ es distinto de 2; no 1,41 pues $(1{,}41)^2$ es distinto de 2; ni 1,414, pues $(1{,}414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.
11. Halla la expresión decimal de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).
12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	**N**	**Z**	**Q**	**I**	$\Re$
–7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212…					
π					
1/2					
1,99999…					



13. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:
14. ¿Puedes demostrar que 4,99999… = 5?, ¿cuánto vale 2,5999…? Escríbelos en forma de fracción.
15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?

2. POTENCIAS

16. Calcula:
    a) $(+1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$
17. Expresa como única potencia:
a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot ((-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$ c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$
18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\frac{(7^4\cdot(-2)^4\cdot 3^4)^3}{(9^2\cdot 4^2\cdot 7^2)^3}$ d) $\frac{3^2\cdot\frac{4^5}{9^5}}{(-2)\cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^6}$
19. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.
20. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8000}$ factorizando previamente los radicandos
21. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$
22. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$
23. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$
24. Escribe en notación científica:
    a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046
25. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.
26. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.
27. Efectúa las operaciones en notación científica:
    a) $0,000481 + 2,4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5,4 \cdot 10^6 + 7,2 \cdot 10^5$ c) $(2,9 \cdot 10^5) \cdot (5,7 \cdot 10^{-3})$
    d) $(3,8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3,5 \cdot 10^6) \cdot (8,1 \cdot 10^{-4})$ e) $(4,8 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6,28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2,9 \cdot 10^2) : (3,98 \cdot 10^{-7})$

3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES

28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 y 0.
29. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de mayor a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –7.
30. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y *Gauss* entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?
31. Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: 10, −4, −7, 5, −8, 7, −6, 0, 8.
32. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números: $\frac{7}{6}; \frac{-17}{4}; 2,375; -3,\overset{\frown}{6}$
33. Representa en la recta numérica 6’5; 6’2; 3’76; 8’43; 8’48; 8’51 y 8’38.
34. Ordena los siguientes números de mayor a menor: +1,47; –4,32; –4,8; +1,5; +1,409; 1,4, –4,308.
35. Busca rectángulo áureo y espiral áurea en Internet.
36. Ya de paso busca la relación entre el *Número de Oro* y la *Sucesión de Fibonacci*.
37. Busca en *youtube* “algo pasa con phi” y me cuentas.
38. Representa en la recta numérica de forma exacta: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

39. Calcula 3 números reales que estén entre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y 1.

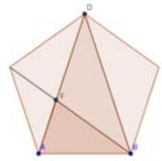
40. Halla 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}\ y\ 1{,}5$

41. Halla 5 números irracionales que estén entre 3,14 y π

42. Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.

43. Calcula con *Geogebra* una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos.

44. Comprueba que los triángulos *ABD* y *ABF* de la figura son semejantes y calcula aproximadamente con *Geogebra* su razón de semejanza.



45. Calcula con *Geogebra* el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS:

46. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Porcentaje superior al 15 %. b) Edad inferior o igual a 21 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 27. d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras.
e) Temperatura inferior a 24 ºC. f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3.
g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

47. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos: a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0,001)

48. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos: a) (1, 7) b) (–5 , –1) c) (–4 , 2)

49. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios y $\sqrt{2}$

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	**118,92**	**84,09**	**10000**
A1	**84,09**	**59,46**	**5000**
A2	**59,46**	**44,04**	**2500**
A3	**42,04**	**29,83**	**1250**
A4	**29,73**	**21,02**	**625**
A5	**21,02**	**14,87**	**415,2**

1) Comprueba los valores de la tabla anterior (hay al menos tres valores equivocados ☺)
2) ¿Cuántos folios A4 caben en un folio A0?
3) ¿Cuáles son las dimensiones del A6?, ¿y del A7?

El número de oro

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\dfrac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

F_n = Número de Fibonacci que ocupa el lugar *n*.

Φ = Número de oro.

a) Calcula F_{31} y F_{30} con la fórmula de Binet.

b) Haz el cociente y mira si es una buena aproximación del Número de Oro.

Busca en Internet al número de oro y a la sucesión de Fibonacci.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realiza las operaciones: a) (24,67 + 6,91)3,2 b) 2(3,91 + 98,1) c) 3,2(4,009 + 5,9)4,8

4. Halla el valor exacto de $\dfrac{0,\overset{\frown}{4}}{0,4}$ sin calculadora.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica: $\dfrac{9}{40};\dfrac{30}{21};\dfrac{37}{250};\dfrac{21}{15}$

6. Halla 3 fracciones *a*, *b*, *c* tal que $\dfrac{3}{4} < a < b < c < \dfrac{19}{25}$

7. ¿Cuántos decimales tiene $\dfrac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a explicar el motivo?

8. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

9. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

    2,73535…; $\pi - 2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100} ; $\dfrac{102}{34}$; –2,5 ; 0,1223334444…

11. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

    a) $\mathbf{Q} \cap (\Re - \mathbf{Q}) = \{0\}$ b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

    c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.

    d) $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$ e) 1/47 tiene expresión decimal periódica.

12. Pon ejemplos que justifiquen:

    a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.

    b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

13. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

14. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

15. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}\ y\ \sqrt{8}$ m.

16. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

Potencias

23. Calcula:

    a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

24. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$ c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : -5/4)^{-4}$

25. Calcula: a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4\right)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrae los factores posibles en cada radical:

    a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expresa en forma de única raíz:

    a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

28. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

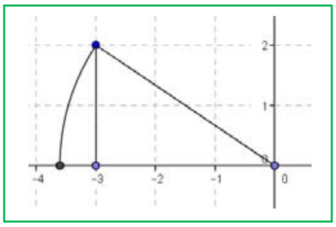
29. Simplifica la expresión:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35000000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.
31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)
32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

Representación en la recta real

33. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y Gauss entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de años hay entre ambas fechas?
34. Representa de forma exacta en la recta numérica: –2,45; 3,666…
35. Sitúa en la recta real los números 0,5; 0,48; 0,51 y 0,505.
36. Ordena los siguientes números de mayor a menor: 2,4; –3,62; –3,6; 2,5; 2,409; –3,9999…
37. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números: $\frac{2}{3}; \frac{-3}{5}; \frac{5}{2}; 1{,}256; 3{,}\hat{5}$
38. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?
39. Representa de forma exacta en la recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5}; \frac{\sqrt{10}}{2}$



40. Halla 5 números racionales que estén entre 3,14 y π.

Intervalos

41. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:
    a. (–5, 5]
    b. $\{x \in \Re \mid -2 < x \leq 7\}$.
    c. $\{x \in \Re \mid x > 7\}$
    d. $(-3, +\infty)$
42. Halla: a. (2, 4] U (3, 5] b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$
43. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.
44. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:
    a. (0 , 8) b. (–6 , –2) c. $(2, +\infty)$
45. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:
    a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. E(1, 2) d. E(0, 1)
46. ¿Qué números al cuadrado dan 7?
47. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?
48. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

Varios

49. Un numero irracional tan importante como Pi es el número “e”. $e \approx 2{,}718281828\ldots$ que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* se hace muy, pero que muy grande. Coge la calculadora y dale a *n* valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, …
    Apunta los resultados en una tabla.
50. Otra forma de definir *e* es $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$
    Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo: 4! = 4·3·2·1 = 24, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No te preocupes, que la tecla “!” está en la calculadora. ¿Puedes calcular e con 6 cifras decimales correctas? **Nota:* Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta *n* = ¿?

51. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

Masa de un electrón	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos
Masa de la Tierra	$5{,}983 \cdot 10^{24}$ kilogramos
Masa del Sol	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kilogramos
Masa de la Luna	$7{,}3 \cdot 10^{22}$ kilogramos

52. Tomando $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa de un protón y $1{,}2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, y suponiéndolo esférico, calcula: a) su volumen en cm^3 (Recuerda el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$. b) Encuentra el peso de un centímetro cúbico de un material formado exclusivamente por protones. c) Compara el resultado con el peso de un centímetro cúbico de agua (un gramo) y de un centímetro cúbico de plomo (11,34 gramos).
Pista: 600,222333€ ¿puede ser un sueldo?

AUTOEVALUACIÓN

1) Indica qué afirmación es falsa. El número –0,3333333… es un número
a) real b) racional c) irracional d) negativo

2) Operando y simplificando la fracción $\frac{a^2-4a+4}{a-2} : \frac{a-2}{a+3}$ se obtiene:
a) $a + 3$ b) $1/(a + 3)$ c) $a – 2$ d) $1/(a – 2)$

3) La expresión decimal 0,63636363…. Se escribe en forma de fracción como
a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4) Al simplificar $\sqrt{2}\,(7\sqrt{2} – 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$ obtienes:
a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}\,(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

5) Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150, 7/50 tienen una expresión decimal:
a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

6) El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:
a) $(–\infty, –2)$ b) $(–\infty, –2]$ c) $(–2, +\infty)$ d) $(–\infty, –2[$

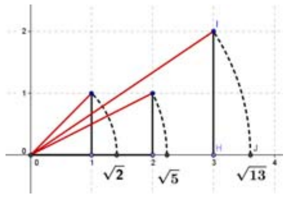
7) El entorno de centro –2 y radio 0,7 es el intervalo:
a) (–3,7, –2,7) b) (–2,7, –1,3) c) (–3,3, –2,7) d) (–2,7, –1,3]

8) El intervalo (–3, –2) es el entorno:
a) E(–2'5; 1/2) b) E(–3'5; –0,5) c) (–3'5, 1/2) d) (–2'5; –0,5)

9) Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:
a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10) Al efectuar la operación $0{,}000078 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ se obtiene:
a) $3{,}6 \cdot 10^{-10}$ b) $1{,}8912 \cdot 10^{-10}$ c) $10{,}2 \cdot 10^{-5}$ d) $18{,}72 \cdot 10^{-5}$

RESUMEN

Conjuntos de números	Naturales ➔ N = {1, 2, 3, …}; Enteros ➔ Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …} Racionales ➔ Q = $\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; Irracionales ➔ I = $\mathfrak{R}$ – Q; $\mathfrak{R}$= Q∪I	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ x = 1,7252525… = 854/495
Números racionales	Su expresión decimal es exacta o periódica.	2/3; 1,5; 0,333333333….
Representación en la recta real	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	
N. Reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0,333333; π; $\sqrt{2}$
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos no pertenecen al intervalo	(2, 7) = {$x \in \mathfrak{R}$/ 2 < x < 7}. 
Intervalo cerrado	Los extremos SI pertenecen al intervalo	[–2, 2] = {$x \in \mathfrak{R}$; $-2 \leq x \leq 2$} 

CAPÍTULO 2: PROPORCIONALIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$

3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?
4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?
5. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?
6. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?
7. Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?
8. Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5823 km?
9. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?
10. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?
11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a) $\frac{27}{100}$ b) “1 de cada 2” c) $\frac{52}{90}$

12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?
13. Un depósito de 2000 litros de capacidad contiene en este momento 1036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?
14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?
15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.
16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.
17. Copia en tu cuaderno y completa:
    a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un ……… % de descuento
    b) Me han descontado el 9 % de una factura de …………….. € y he pagado 280 €.
    c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?
19. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 % ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?
20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.
21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un 20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?
22. La distancia real entre dos pueblos es 28,6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?
23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?
24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.
25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1 : 50, calcula sus medidas reales.

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12			60
Horas de trabajo			80		28	10	

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1,25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?
28. En un huerto ecológico se utilizan 5000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?
29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1,7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2,3 kilogramos?
30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?
31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?
33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?
34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?
35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?
36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?
37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?
38. Si 4 máquinas fabrican 2400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7000 piezas durante 10 horas diarias?

3. REPARTOS PROPORCIONALES

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
40. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?
41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48.000.000 € para tres Estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?
42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.
43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?
44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?
45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?
46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?
47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?
48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.
50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1,80 €/l para obtener una mezcla a 2,13 €/l?
51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro.
52. ¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?

4. INTERÉS

53. Calcula el interés simple que producen 10.000 € al 3 % durante 750 días.
54. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?
55. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39500 €?

CURIOSIDADES. REVISTA

1) Confecciona tu propia hoja de cálculo

2) La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Antes de empezar a calcular, da tu opinión.

3) En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?

4) Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

5) En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más fróo?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

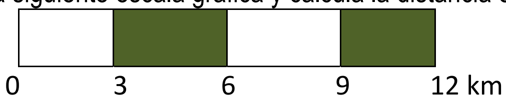
litros	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

2. Estima cuántas personas caben de pié en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?
3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?
4. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?
5. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0,6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?
6. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?
7. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?
8. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es k = 1,8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15,9			0,01	
Magnitud B		6	0,1		10

9. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
10. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?
11. Si un litro de leche de 0,85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?
12. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1200 €?
13. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?
14. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
15. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?

16. Por liquidar una deuda de 35000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
17. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
18. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?
19. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?
20. Un mapa está dibujado a escala 1 : 800000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?
21. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?
22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:
    a) Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre
    b) Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar
    c) Talla de zapatos y precio de los mismos
    d) Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen
    e) Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado
    f) Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse
    g) Edad de una persona y estatura que tiene
    h) Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla
    i) Edad de una persona y número de amigos que tiene
26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?
27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	20		7		10,8
B		0,05		0,3	

28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?
29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?
30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2,7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?
31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?
33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?
34. Si 15 operarios instalan 2500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5250 m de valla?
35. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?
36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

37. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?
38. Repartir 4350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.
39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1,75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.
40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2,5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1,6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1,2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?
41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4,2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.
42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?
43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2350000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?
44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280,5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?
45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0,900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0,950 de ley y 20 g de 0,750 de ley?
46. ¿Qué capital hay que depositar al 3,5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?
47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25400 € al 1,4 % en 10 años?
48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74500 € al 3 % para obtener un interés de 2980 €?
49. Al 3 % de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63338,5 €. ¿De qué capital se trata?
50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?
51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

a) 2000; 0,025; 20; 20000 b) 2000; 0,25; 2; 20000 c) 1000; 0,025; 10; 10000

2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:
a) 2000 € b) 1900 € c) 1800 € d) 1500 €.
3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:
a) 10 % b) 12,5 % c) 15,625 % d) 11,75 %
4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?
a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas
5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:
a) 24 t y 20 t b) 20 t y 24 t c) 24 t y 18 t d) 25 t y 20 t
7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2,7 cm equivalen a 0,81 km es:

a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300

8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?
a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos
9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0,85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:
a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,049€
10. La ley de una aleación es 0,855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:
a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g

RESUMEN

<table>
<tr><td>Proporcionalidad directa</td><td>Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.
La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen: $y = kx$. La pendiente de la recta, k, es la razón de proporcionalidad directa.</td><td>Para empapelar 300 m^2 hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m^2, necesitaremos 8,32 rollos, pues k = 300/24 = 12,5, y =12,5x, por lo que x = 104/12,5 = 8,32 rollos.</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidad inversa</td><td>Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.
La función de proporcionalidad inversa es la hipérbola $y = k'/x$. Por tanto la razón de proporcionalidad inversa $k´$ es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a´ \cdot b´$.</td><td>Dos personas pintan una vivienda en 4 días. Para pintar la misma vivienda, 4 personas tardarán: k' = 8, y = 8/x, por lo que tardarán 2 días.</td></tr>
<tr><td>Porcentajes</td><td>Razón con denominador 100.</td><td>El 87 % de 2400 es ——— = 2088</td></tr>
<tr><td>Escalas</td><td>La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.</td><td>A escala 1:50000, 35 cm son 17,5 km en la realidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reparto proporcional directo
Repartir directamente a 6,10 y 14, 105000 €
6 + 10 + 14 = 30   105000 : 30 = 3500
6 · 3500 = 21000 €   10 ·3500 = 35000 €   14 · 3500 = 49000 €</td><td>Reparto proporcional inverso
Repartir 5670 inversamente a 3,5 y 6
1/3 + 1/5 + 1/6 = $\frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5670 : 21 = 270
270 · 10 = 2700   270 · 6 = 1620   270 · 5 = 1350</td></tr>
<tr><td>Mezclas y aleaciones</td><td>Mezclar distintas cantidades de productos, de distintos precios.
La ley de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.</td><td>Una joya que pesa 245 g y contiene 195 g de plata, su ley es: $\frac{195}{245}$ = 0,795</td></tr>
<tr><td>Interés simple y compuesto</td><td>El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo</td><td>C = 3600; r = 4,3 %; t = 8 años
I = $\frac{3600 \cdot 4{,}3 \cdot 8}{100}$ = 1238,4 €</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 3: POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (*N*) así como la cantidad total de minutos de conversación (*M*). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es: $(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N$ €
2. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.
3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera: *x* e *y*:
   a) La mitad del opuesto de su suma.
   b) La suma de sus cubos
   c) El cubo de su suma
   d) El inverso de su suma
   e) La suma de sus inversos
4. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:
   a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$
5. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 15 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.
6. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 15 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.
7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:
   a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.
   b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.
   c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.
8. Indica en cada caso el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$
   a) $x = 1, y = 2, z = 1$
   b) $x = 2, y = 0, z = 5$
   c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

9. Indica el coeficiente y la parte literal de las siguientes monomios:
   a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$
10. Realiza las siguientes sumas de polinomios:
    - $(2x^2 - 2x) + (-3x^2 - 4x + 2) + (3x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$
    - $-2x^4 + (2x^3 + 3x - 4) + (-4x^2 - 6x + 5) + (3x^3 - 2x + 6)$
11. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:
    a) $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$ b) $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$
    c) $(-3)(2a + 4b) - (2b - 3a)$ d) $4(2a^2 - 2ab + 2b^2) - (3a^2 - 4ab)$
12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:
    - $4x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x - 2$
    - $9x$
    - $-2x^4 + 4x^2$
13. Considera los polinomios $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$, $q \equiv 2x^2 + 2x + 9$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.
14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$ b) $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$

c) $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$ d) $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-3x^3+x)-(-2x^2)$ b) $(3x^4+2x)-(-4x-5)$ c) $(4x^2-2x)-(x^3+2x^2-2x)$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $3x^3-2x^2+x$ b) $-4x^4+2x-5$ c) $-x^2+2x-6$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2\cdot(-3x^2-4x+2)\cdot 3x^3$ b) $(3x-4)\cdot(-4x^2-6x+5)\cdot(-2x)$

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-20x^3-40x^2+10x$ b) $60x^4-30x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{r|l}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 &
\end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{r|l}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2+4x \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} \qquad & \\
-4x^2-9x-2 &
\end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{r|l}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2+4x-2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} \qquad & \\
-4x^2-9x-2 & \\
\underline{4x^2-2x+6} & \\
-11x+4 &
\end{array}$$

22. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3-2x^2-2x+6$ entre x^2-3x+5 b) $-15x^3-3x^2+4x+5$ entre $5x^3-2x^2-2x+4$

c) $6x^4-7x^3+7x^2-4x-8$ entre $-2x^2+2x+5$ d) $-7x^5+3x^2+2$ entre x^2+4

e) $-16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6$ entre $4x^3+2x^2+x-2$

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2+2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=-2x^2+3$ como resto.

24. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$ b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$ d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

25. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$ b) $\frac{x-1}{x^2+5x}-\frac{6}{x+5}$

26. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$ b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$ c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\frac{3y^2+2y}{y-4}$ e) $\frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

27. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

28. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

29. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

- $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad)$
- $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

30. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

31. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1 b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2 c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1

d) $x=0$ de x^3-3x^2+1 e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

32. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?
- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?
- ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

33. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.
34. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.
35. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.
36. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$ admite al número 0 como raíz.
37. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$ admite al número 1 como raíz.
38. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+6$ b) $-x+4$ c) $2x-7$ d) $-4x-5$ e) $-3x$

f) x^2-5x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+4x

39. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:
   a) $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$ b) x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$
   c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$ d) x^3-8x+2 entre $x-3$
40. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:
   a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5 b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$
   c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$ c) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$
41. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.
42. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.
43. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:
   a) x^3-x^2+2x-2 b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$ c) $2x^3+x^2-18x-9$ d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$
44. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.
45. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:
   a) $3x^2+4x+1$ b) $2x^3-9x^2+12x-4$
46. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:
   a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$
47. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:
   a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$
48. Realiza los cálculos:
a) $(1+4a)^2$ b) $(-x+5)^2$ c) $(-2x-3)^2$ d) $(x^2-1)^3$ e) $(5x+3)^3$
49. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:
   a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$
50. Desarrolla las siguientes potencias:
   a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$
   d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$
51. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:
   a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$
   d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$
52. Efectúa estos productos:
a) $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$ b) $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$ c) $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$
53. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:
a) x^2-4x+4 b) $3x^2+18x+27$ c) $3x^5-9x^3$
54. Calcula los siguientes productos:
   a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$
   c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$
55. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones
   a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$
56. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas
   a) $\frac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\frac{6-3a}{a^2-4}$

CURIOSIDADES. REVISTA

Haz magia

- Piensa un número
- Multiplícalo por 2
- Suma 4
- Multiplica por 5
- Divide por 10
- Resta el número
- Magia, magia, magia…
- ¡El resultado es 2!

Analiza cómo tú, el mago, has podido conocer el resultado.

Pasatiempo

A B A
A B A
A B A
B C B

¿Cuánto valen A, B y C?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.
   i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
   ii. Que lo multiplique por 3
   iii. Que al resultado anterior le sume 18
   iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
   v. Que divida entre 6 la última cantidad
   vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
   vii. Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?
2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.
   i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
   ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
   iii. Que multiplique por 5 lo obtenido
   iv. Que multiplique el resultado precedente por 5
   v. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
   vi. Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?
3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

$$\frac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)} \qquad \frac{-x}{x^2-6x+9} \qquad \frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4} \qquad \frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$$

4. Una persona tiene ahorrados 2500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?
5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?
6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(5)=-2$.
7. Consideremos los polinomios $p(x)=-3x^3+2x^2-4x-3$, $q(x)=4x^4+3x^3-2x^2+x+8$ y $r(x)=5x^2+6x-2$. Realiza las siguientes operaciones:

   $p+q+r \qquad p-q \qquad p\cdot r \qquad p\cdot r-q$

8. Calcula los productos:

   a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) (0,3x – 0,2y + 0,1z) · (0,1x + 0,2y – 0,3z) c) (x – 1) (x – a) (x – b)

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

$3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$

$5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{2x-3}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-6x+9} \qquad \frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{3x}{x^2-6x+9} \qquad \frac{2x-3}{x^2-3x}\cdot\frac{3x}{x^2-6x+9} \qquad \frac{2x-3}{x^2-3x}:\frac{3x}{x^2-6x+9}$$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.
13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.
14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6, -3, 2 y 0.
15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.
16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6, -3, 2, 4 y 5.
17. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = x^2 + x + 1$.
18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$ b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$ c) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.
20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

$3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$ $\quad 3x^3 + 5x^2 + x - 1$ $\quad 2x^3 + x^2 - 6x - 3$ $\quad 3x^3 - 6x^2 + x - 2$

21. Calcula las potencias:

a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

$x^2 - 36$ $\quad 5x^2 + 1$ $\quad 5x^2 - 11$ $\quad x^2 - 3y^2$ $\quad x^2 - 6x + 9$

$x^4 - 8x^2 + 16$ $\quad x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$ $\quad x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ $\quad x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

23. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{x^3-x}{x^4-1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}-\dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7}:\dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b}-\dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a+b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

   a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado ……….

b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

d) La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado ……….

4. Al dividir el polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ el polinomio resto resultante:

   a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

   c) debe ser de grado 1. d) debe ser de grado menor que 2.

5. Considera el polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

   a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

   a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) -3 y $\frac{1}{3}$ d) -3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces reales. b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz real.

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y letras sometidos a las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenemos $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ de grado 6 y coeficiente –5 $7 \cdot x^2$ de grado 2 y coeficiente 7
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
División de dos polinomios	Al dividir el polinomio *p*(*x*) entre *q*(*x*) se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente, *c*(*x*), y resto, *r*(*x*), tales que $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 =$ $= (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Raíces y factorización	Si α es una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de $x^3 + 2x^2 - x - 2$ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2) \cdot (x^2 - 1)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

CAPÍTULO 4: ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

ECUACIONES

1. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $4x - 5xy + 7 - 2yx = 8x$.
2. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $5(7x + 6) = 21$ b) $-2x + 7 = -7(3x - 2) - 8x$ c) $2x - 6(9 + 5x) = 4(x + 6) + 7$
3. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$ b) $6-\left(8-4\left(3x-\frac{3}{7}\right)\right)=2x-\frac{5-9x}{7}$ c) $8(3x-5)=7(6-9x)$
4. Comprueba que la solución de $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{1}{6}$ es $x = 6$.
5. Escribe tres ecuaciones de primer grado que tengan como solución 3, otras tres que tengan infinitas soluciones y tres que no tengan solución.
6. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 30 cm y que su base es doble que su altura.
7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(3x + 4) = 7$ b) $-4x + 6 = -9(5x - 1) - 5x$ c) $4x - 7(11 + 2x) = 6(x + 8) + 9$

d) $2(3-4x)+\frac{4}{7}(x-2)=2x-\frac{5-4x}{7}$ e) $2-\left(7-5\left(2x-\frac{1}{3}\right)\right)=4x-\frac{6-2x}{3}$ f) $3(7x-1)=9(3-2x)$

8. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:
   a) $5x^2-\sqrt{2}x+8=0$ c) $3{,}2x^2 - 1{,}25 = 0$ e) $2x^2-\frac{3}{x}=0$
   b) $5xy^2 - 8 = 0$ d) $28 - 6{,}3x = 0$ f) $2x^2-3\sqrt{x}+4=0$
9. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.
   a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3{,}4x^2 + 7{,}8x = 0$ c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1{,}25x^2 - 3{,}47x + 2{,}75 = 0$.
10. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.
    a) $2 -7x^2 + 11x = 0$ b) $-2{,}3x^2 + 6{,}7x = 0$ c) $5x^2 - 9 = 0$ d) $9{,}1x^2 - 2{,}3x + 1{,}6= 0$
11. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:
    a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $2x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 3x - 10 = 0$
12. Resuelve las siguientes ecuaciones:
    a) $5x-2\frac{x-1}{5}=x^2-\frac{10x+8}{5}$ b) $4\frac{x-3}{5}-\frac{7-4x}{x}=8$ c) $x(x-2)+3(x^2-7)+11=-11$
    d) $6(x^2-7)+2(x^2-9)+3=2$ e) $\frac{3-6x^2}{2x}-\frac{1}{3}=\frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{1-2x^2}{3x}-\frac{2}{5}=\frac{4x-2}{15}$.
13. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:
    a) $5x^2 + 2x + 4 = 0$ b) $2x^2 - 7x + 8 = 0$ c) $x^2 - 5x - 11 = 0$ d) $3x^2 - 8x + 6 = 0$
14. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

15. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado: a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$
    c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21= 0$
16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.
17. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm². Calcula sus dimensiones.
18. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale *a*?
19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 6) \cdot (x - 3) \cdot (x + 7) \cdot (x - 1) \cdot (x - 9) = 0$ b) $3(x - 4) \cdot (x - 8) \cdot (x + 5) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1) = 0$

20. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

21. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$

22. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

23. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes: a) $2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3}=8$; b) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ c) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\frac{1}{16}$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

24. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3xy + y = 5 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 3 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 3 = 2y \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

26. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

27. Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$, inventa un enunciado que resuelva dicho sistema

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

29. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 18 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

31. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left. \begin{array}{r} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\}$

32. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

33. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{array} \right\}$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{array} \right\}$

34. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

35. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?
36. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.
37. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.
38. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.
39. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?
40. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.
41. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?
42. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años". Calcula la edad del hijo.
43. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m^2, sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.
44. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 4 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?
45. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.
46. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.
47. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 35. ¿Qué edad tienen cada uno?
48. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?
49. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.
50. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?
51. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.
52. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?
53. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 61, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?
54. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:
    El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.
    El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.
    El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.
    Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.
55. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0,5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?
56. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1,2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?
57. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?
58. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Ecuaciones

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $4(3-2x)+\frac{5}{7}(6x-2)=2x-\frac{1-9x}{7}$ b) $4-\left(3-5\left(2x-\frac{1}{6}\right)\right)=3x-\frac{4-5x}{3}$ c) $4(2x-5)=6(9-4x)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-3x^2 - 5x - 2 = 0$ b) $2x(-3 + x) = 5$ c) $3x^2 = 27x$
d) $5(3x + 2) - 4x(x + 6) = 3$ e) $4(x - 9) + 2x(2x - 3) = 6$ f) $10(2x^2 - 2) - 5(3 + 2x) = -21$
g) $4(x + 5)\cdot(x - 1) = -2x - 4$ h) $3x\cdot(5x + 1) = 99$ i) $2(3x^2 - 4x + 2) - 2x(3x - 2) = -5$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$ b) $\frac{x^2-3}{5}+\frac{x^2-4x+1}{5}=2$ c) $\frac{2x^2+3}{3}+\frac{x+5}{6}=2$
d) $\frac{1-x^2}{3}+\frac{4x-1}{2}=\frac{1}{6}$ e) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{3x-7}{4}=2x-5$ f) $\frac{3x+2x^2}{5}-\frac{4x-7}{10}=2$

4. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$
d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$
g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

5. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:
$2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 5)\cdot(x - 5) = 0$.
Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

6. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm 2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$, luego sus soluciones son 2 y 4.
Utiliza esa expresión para resolver:
a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

7. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 3)\cdot(x - 7) = 0$ b) $(x + 2)\cdot(x - 4) = 0$ c) $(x - 8)\cdot(x - 4) = 0$
d) $(x - 2)\cdot(x + 5) = 0$ e) $(x + 6)\cdot(x - 3) = 0$ f) $(x - 5)\cdot(x + 3) = 0$

8. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 5x - 2 = 0$ b) $5x^2 + 2x - 4 = 0$ c) $2x^2 + 4x + 11 = 0$
d) $2x^2 - 3x + 8 = 0$ e) $3x^2 - x - 5 = 0$ f) $4x^2 + 2x - 7 = 0$

9. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.
10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.
11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.
12. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$ c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$
d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $2x+\frac{3}{x}=5$ b) $\frac{3}{5x}+\frac{1}{2x}=x$ c) $\frac{1}{x-3}+2=\frac{5}{x-3}$ d) $\frac{2x}{3-2x}-5x=1$

e) $\frac{2}{x+1}=\frac{3(2x+1)}{x-1}+3$ f) $\frac{2x-3}{x+1}-\frac{4+5x}{x}=7$ g) $\frac{3x-2}{x+1}-\frac{2+3x}{x-1}=4$

h) $\frac{3}{1-x}=\frac{5}{x}+\frac{2}{x-x^2}$ i) $\frac{3x}{x-2}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3x}{2}$ j) $\frac{1}{2}=\frac{x-5}{3-4x}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x=-3+\sqrt{5+2x^2}$ b) $\sqrt{25-x}=x-5$ c) $7+\sqrt{x^2-3x+2}=3x$

d) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=1$ e) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+1=0$ f) $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}=5$

g) $3\sqrt{x-2}-4=\frac{-2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}=1$ i) $\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}=4$

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: a) $3^{3x}=\frac{1}{81}$ b) $5^{2x}=\frac{1}{625}$

Sistemas

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases}4x-3y=1\\3x-y=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+4y=6\\2x+5y=9\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+3y=10\\x+y=4\end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases}-3x+2y=-1\\3x-y=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}5x-2y=1\\4x-y=2\end{cases}$ c) $\begin{cases}7x-4y=10\\-8x+3y=-13\end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases}7x-2y=5\\2x+y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x+2y=10\\-x-6y=-14\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-6y=0\\-7x+5y=-9\end{cases}$

20. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases}x+y=6\\x-y=4\end{cases}$ b) $\begin{cases}5x+3y=5\\x-7y=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-y=1\\-7x+5y=3\end{cases}$

21. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}\frac{2x-3}{3}-\frac{y-1}{5}=-1\\\frac{2x+3}{2}+\frac{3y-1}{4}=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{2y+3}{5}=-3\\5x+2y=-10\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{2x+3}{2}+\frac{3y-2}{3}=2\\7x-y=1\end{cases}$

22. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado — Incompatible — Su solución sea x = 2 e y = 1

a) $\begin{cases}(\ )x+3y=(\ )\\2x-y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}-5x+y=2\\(\ )x+y=6\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-y=(\ )\\(\ )x+y=7\end{cases}$

Incompatible — Su solución sea x = –1 e y = 1 — Compatible indeterminado

d) $\begin{cases}2x-5y=-1\\4x+(\ )y=(\ )\end{cases}$ e) $\begin{cases}3x+(\ )y=-1\\(\ )x+3y=5\end{cases}$ f) $\begin{cases}(\ )x+6y=(\ )\\2x+3y=-2\end{cases}$

23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases}-2x+6y=13\\x-3y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-y=-3\\4x-4y=-12\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-y=4\\-x+3y=-5\end{cases}$

Problemas

24. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?
25. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?
26. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6
27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?
28. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.
29. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?
30. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?
31. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365
32. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?
33. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?
34. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?
35. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?
36. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.
37. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números
38. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?
39. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?
40. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?
41. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?
42. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?
43. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?
44. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?
45. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
46. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?
47. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?
48. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?
49. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tienen?
50. Se mezclan 15 kg de maíz de 2,1 € el kilogramo con 27 kg de maíz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 3 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo maíz?
51. La altura de un trapecio isósceles es de 4 cm, el perímetro, 24 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.
52. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Valencia (que está a 350 km de Madrid) a las 8 de la mañana. Uno va a 100 km/h y el otro a 120 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿Cuántos km han recorrido cada uno?
53. En un concurso se ganan 50 euros por cada respuesta acertada y se pierden 100 por cada fallo. Después de 20 preguntas, Pilar lleva ganados 250 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?
54. Juan ha comprado 6 zumos y 4 batidos por 4,6 €, luego ha comprado 4 zumos y 7 batidos y le han costado 4,8 €. Calcula los precios de ambas cosas.
55. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a $\frac{1}{2}$ cuando se suma 2 al denominador?

56. El cociente de una división es 3 y el resto es 2. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 2 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.
57. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: "Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". La otra le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada una?
58. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 30 cm^2, y cuyo perímetro mide 26 cm.
59. Un peatón sale de una ciudad "A" a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad "B" que está a 12 km de la ciudad "A", 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad "B" a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia "A", ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de "B" se cruzan?
60. Se desea mezclar aceite de 3 €/l con otro aceite de 4,2 €/l de modo que la mezcla resulte a 3,50 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?
61. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 27 unidades mayor. Halla el número inicial.
62. La diagonal de un rectángulo mide 30 cm, y el perímetro 84 cm. Halla los lados del rectángulo.
63. Una valla rodea un terreno rectangular de 1000 m^2. Si la valla mide 130 metros, calcula las dimensiones del terreno.
64. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 900 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan dos amigos más, con lo que cada uno toca a 15 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?
65. Las diagonales de un rombo se diferencian en 3 cm y su área es de 20 cm^2. Calcula su perímetro.
66. Un tren sale de Bilbao hacia Alcázar de San Juan a una velocidad de 140 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de Alcázar de San Juan hacia Bilbao a 100 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 500 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Alcázar de San Juan?
67. Un coche sale de una ciudad "A" a una velocidad de 70 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de "A" en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de "A" se produce el encuentro?

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $3(x-1)-2(x-2)=5$ es:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = -2/3$ d) $x = 3$

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x-1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{4x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x^2}{2}$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

4. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son:

a) 1, –1, 4, –4 b) 1, –1, 2, –2 c) 2, –2, 3, –3 d) 2, –2, 5, –5

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3+2x-7=x-1+y \\ 2x-9y=13 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = -1$ b) $x = -2$ e $y = 1$ c) $x = 1$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 1$

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 20 años b) 7 años c) 25 años d) 8 años

RESUMEN

		Ejemplos
Ecuación de primer grado	Quitar denominadores Quitar paréntesis Transponer términos Simplificar y despejar	$5/3x + 3(x + 1) = 2 \Rightarrow$ $5/3x + 3x + 3 = 2 \Rightarrow$ $5x + 9x + 9 = 6 \Rightarrow$ $14x = -3 \Rightarrow x = -3/14$.
Ecuación de segundo grado	Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Número de soluciones de una ecuación de 2º grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, tiene dos soluciones 5 y -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Suma y producto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

CAPÍTULO 5: GEOMETRÍA DEL PLANO Y DEL ESPACIO.

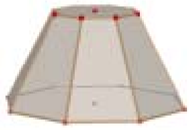
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm* y su hipotenusa 30 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 *cm*.
2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
   a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 1 *m* y 7 *m*
   c) 2 *dm* y 5 dm d) 23,5 *km* y 47,2 *km*.
   Utiliza la calculadora si te resulta necesaria.
3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
   a) 8 *cm* y 3 *cm* b) 15 *m* y 9 *m*
   c) 35 *dm* y 10 *dm* d) 21,2 *km* y 11,9 *km*
4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 *m*.
5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 *cm*.
6. Una caja tiene forma cúbica de 3 *cm* de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?
7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.
8. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1,5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0,2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio?
9. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.
10. En un triángulo regular *ABC* de lado, 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?
11. Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?
12. Justifica que los triángulos ABC y $A''B''C''$ son semejantes. Calcula la razón de semejanza y la razón entre sus áreas. Busca una relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes.
13. ¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y $A''B''C''$? Observa en la **Ventana algebraica** las longitudes de sus lados y los valores de sus áreas. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas?
14. Dibuja distintos pentágonos y hexágonos que no sean regulares y con la herramienta **Dilata objeto desde punto indicado, según factor**, construye otros semejantes.
    a) Argumenta por qué son semejantes.
    b) Calcula en cada caso la razón de semejanza y la razón entre sus áreas.
    c) Investiga cómo puedes hallar la razón entre las áreas de polígonos semejantes a partir de la razón de semejanza.
15. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?
16. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
17. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

18. Calcula el volumen de un prisma recto de 20 *dm* de altura cuya base es un hexágono de 6 *dm* de lado.
19. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 *cm* de diámetro y que el agua alcanza 12 *dm* de altura.
20. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 *cm* y cada arista lateral 2 *dm*.
21. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 *m* de altura. Calcula el perímetro de la base.
22. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 *cm* y la altura de la pirámide 15 *cm*. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.



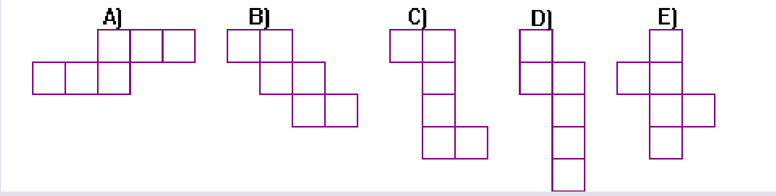
23. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 *dm* y que la altura de cada cara lateral es de 9 *dm*.
24. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2 y la arista de la base mide 4 cm, calcula el apotema de la pirámide y su altura.
25. Una columna cilíndrica tiene 35 *cm* de diámetro y 5 *m* de altura. ¿Cuál es su área lateral?
26. El radio de la base de un cilindro es de 7 *cm* y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.
27. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 *dm* y su radio de la base 6 *dm*.
28. La circunferencia de la base de un cono mide 6,25 *m* y su generatriz 12 *m*. Calcula el área total.
29. Una esfera tiene 4 *m* de radio. Calcula:
    a) La longitud de la circunferencia máxima;
    b) El área de la esfera.
30. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 *m* de altura y 2 *m* de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.
    a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).
    b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?
31. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 *dm* sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 *dm* de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 *dm* de altura y 4 *dm* de radio de la base.

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

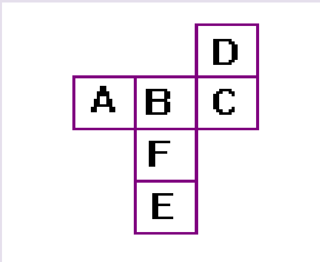
32. Represente en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos:
    O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4) y vectores: ***DE*** y ***OA***.
33. El vector de componentes ***u*** = (2, 3) y origen *A* = (1, 1), ¿qué extremo tiene?
34. Calcula la distancia entre los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9).
35. Calcula la distancia entre los puntos *A*(6, 2, 5) y *B*(3, 9, 7).
36. Calcula la longitud del vector de componentes ***u*** = (3, 4)
37. Calcula la longitud del vector de componentes ***u*** = (3, 4, 1).
38. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto *O*(0, 0) y *A*(3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.
39. Dibuja un cubo de diagonal *O*(0, 0, 0) y *A*(3, 3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.
40. Sea *X*(*x*, *y*) un punto genérico del plano, y *O*(0, 0) el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos *X* que distan de *O* una distancia *D*.
41. Sea *X*(*x*, *y*, *z*) un punto genérico del espacio, y *O*(0, 0, 0) el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos *X* que distan de *O* una distancia *D*.
42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.
43. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2, 5) y *B*(3, 9, 7), de forma explícita, y como intersección de dos planos.
44. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.
45. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.
46. En el cubo de diagonal *O*(0, 0, 0) y *A*(6, 6, 6) escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.
47. Escribe la ecuación del cilindro de eje el eje OZ y radio 2.
48. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.
49. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y radio 1.
50. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro *A*(2, 5) y radio 2.
51. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro

CURIOSIDADES. REVISTA

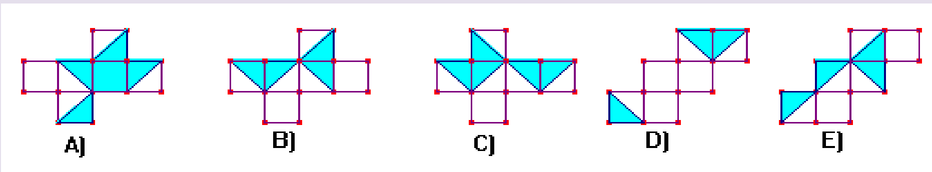
¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?

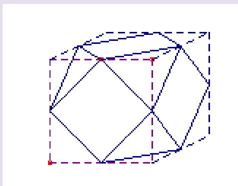


Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?



A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?





Haz el desarrollo

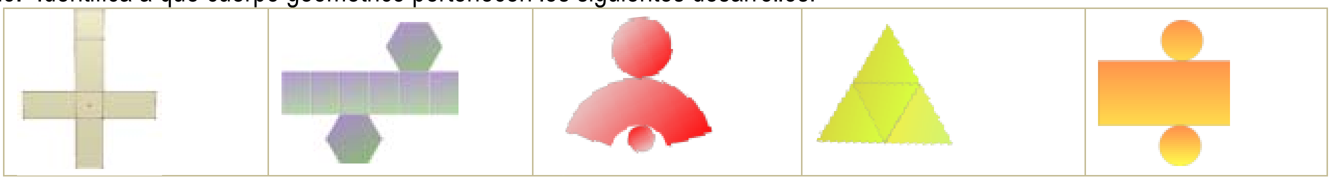
EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Teorema de *Pitágoras* y teorema de *Tales*

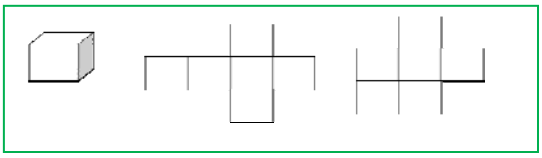
1. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *cm*.
2. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.
3. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 6 *cm*.
4. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm* que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.
5. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?
6. Un vaso de 11 *cm* de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 *cm*. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 *cm*?
7. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 *cm*, 3 *cm* y 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de longitud?
8. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.
9. Si un ascensor mide 1,2 *m* de ancho, 1,6 *m* de largo y 2,3 *m* de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 *m* de altura?
10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?
11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3,46 *cm*.
12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 *cm* y 2 *cm*, y altura 10 *cm*.
13. En una pizzería la pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € y la de 40 *cm* vale 5 €. ¿Cuál tiene mejor precio?
14. Vemos en el mercado una merluza de 30 *cm* que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

Longitudes, áreas y volúmenes

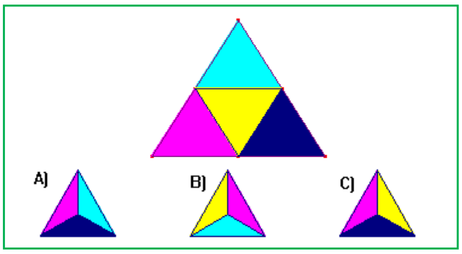
16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:



17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
18. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?



19. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo
20. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?
21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



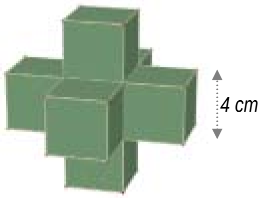
22. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.
23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura y calcula las áreas de la base y total.
24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.
25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2,7 *dm*, 6,2 *dm* y 80 *cm*.
26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.
27. Calcula el área total de una esfera de 7 *cm* de radio.
28. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm^2 y su base es un hexágono de 4 *cm* de lado.
29. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 *dm* y la altura de la pirámide es de 6 *dm*. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.
30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
31. Tres bolas de metal de radios 15 *dm*, 0,4 *m* y 2 *m* se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

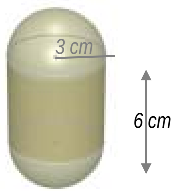
32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?
33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?
34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.

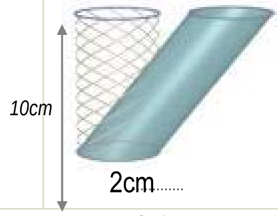
35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?
36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

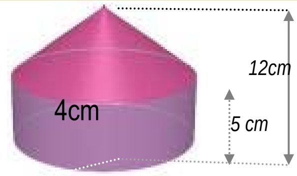
37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.
38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.
39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado de la base y 5 *cm* de altura.
40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 18,3 *m*.
42. Un ortoedro tiene 0,7 *dm* de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?
43. Si el volumen de un cilindro de 15 *cm* de altura es de 424 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro.
44. (CDI Madrid 2011) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
45. (CDI Madrid 2012) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.
46. Una circunferencia de longitud 18,84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.
47. Una puerta mide 1,8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.
48. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 *m*?
49. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

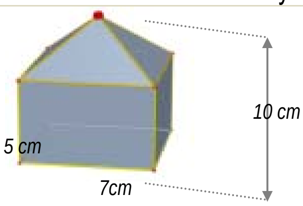




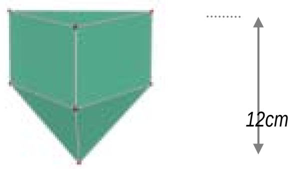




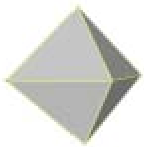
50. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



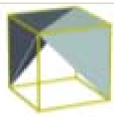
La base es cuadrada



Tetraedro de 5cm de arista



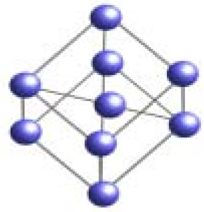
Octaedro de 6cm de arista



Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

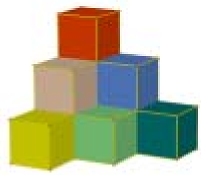
51. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
52. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 *cm* de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.
53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.
54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33,51 dm^3 de volumen.

55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?



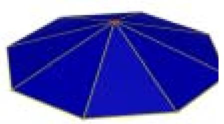
56. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
    a) ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
    b) ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?
57. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?
59. En una vasija cilíndrica de 3 *m* de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,5 *m* el nivel del agua?
60. El precio de las tejas es de 12,6 €/*m*^{2} ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 *m* de altura y 15 m de lado de la base?
61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 *cm* y 26 *cm* formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?
62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 *cm* de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 *cm*^{3} de volumen?



63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.
64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?
65. La densidad de un tapón de corcho es de 0,24 g/cm^3, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus base miden 2,5 *cm* y 1,2 *cm*, y su altura 3 *cm*?
66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.
67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 *cm*.
68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 *cm*^{3}, y de área lateral 240 *cm*^{2}.
69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura y bases de radios 20 y 10 *cm*. Calcula su superficie.

70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio y 30 *cm* de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 *cm*. Calcula el espacio libre que hay en su interior.
71. Un embudo cónico de 15 *cm* de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?



72. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?
73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0,5 *m* de altura y 40 *cm* de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 *m*. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?
74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?
75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos *cm*^{3} de helado contiene?

Iniciación a la Geometría Analítica

76. Calcula la distancia entre los puntos *A*(7, 3) y *B*(2, 5).
77. Calcula la distancia entre los puntos *A*(7, 3, 4) y *B*(2, 5, 8).
78. Calcula la longitud del vector de componentes *u* = (4, 5).
79. Calcula la longitud del vector de componentes *u* = (4, 5, 0).
80. El vector *u* = (4, 5) tiene el origen en el punto *A*(3, 7). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?
81. El vector *u* = (4, 5, 2) tiene el origen en el punto *A*(3, 7, 5). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?
82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto *A*(2, 3) y *C*(5, 6). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

83. Dibuja un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(4, 4, 4)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.
84. Sea $X(x, y)$ un punto del plano, y $A(2, 4)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.
85. Sea $X(x, y, z)$ un punto del espacio, y $A(2, 4, 3)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.
86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y tiene como vector de dirección $u = (4, 5)$. Represéntala gráficamente.
87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.
88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, 6)$ y $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.
89. En el cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(5, 5, 5)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.
90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y radio 3.
91. Escribe la ecuación de la esfera de centro $A(2, 7, 3)$ y radio 4.
92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ y radio 2.
93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(3, 7)$ y radio 3.
94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ y $C(0, 3)$ son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura y lado de la base 1 *m*. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}$ m^3 b) $45\sqrt{2}$ m^3 c) $30000\sqrt{2}$ dm^3 d) $7{,}5\sqrt{3}$ m^3

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0,5 *m* de altura y 1000 *cm* de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:

a) 1 508 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

6. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura y 3 *cm* de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

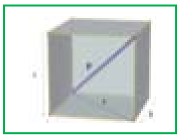
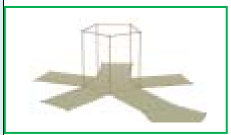
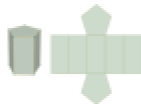
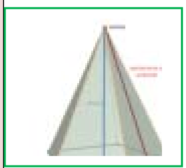
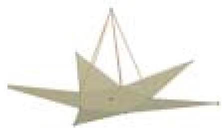
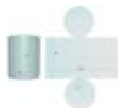
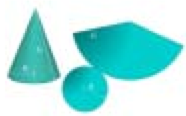
9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(1, 3)$ es:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. La ecuación de la esfera de centro $A(2, 3, 5)$ y radio 3 es:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$
c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

RESUMEN

		Ejemplos
Teorema de Pitágoras en el espacio	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$a= 2$, $b = 3$, $c = 4$, entonces $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5{,}4$.
Teorema de Tales:	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. Si la recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*, entonces los segmentos correspondientes son proporcionales	
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$; $A_{total} = Área_{Lateral} + 2\,Área_{Base}$; $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volumen = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volumen = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volumen = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuaciones de la recta en el plano	Ecuación explícita: $y = mx + n$.; Ecuación implícita: $ax + by + c = 0$; Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.	Ecuación implícita de un plano: $ax + by + cz + d = 0$ Ecuación paramétrica de una recta: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

CAPÍTULO 6: FUNCIONES Y GRÁFICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FUNCIONES

1) Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:
2) Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano: A (2, –3); B (0, –1); C (3, 4).
3) De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:
    a. Edad y peso de una persona concreta a lo largo de su vida
    b. Peso y edad de esa misma persona
    c. Un número y su mitad
    d. Un número y su cuadrado
    e. Precio de la gasolina y el día del mes
    f. Día del mes y precio de la gasolina
4) Si hoy el cambio de euros a dólares está 1 € = 1,3 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

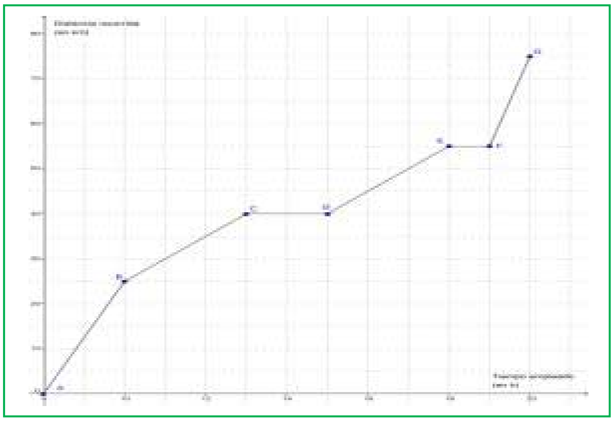
€	2	5	10	27	x
$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas, en la que, conociendo los euros, se obtengan los dólares. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?
Si cuando realizas el cambio en una oficina te cobran una comisión fija de 1,5 €, ¿cómo quedaría la fórmula en este caso?

5) Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y otra que no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.
6) Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–10	–5	10	–10	27
f(x)	–3	0	5	4	0

7) Una persona camina a una velocidad de 4 km/h y parte del kilómetro 10. Escribe la expresión algebraica de la función que indica los kilómetros recorridos en función del tiempo. Señala cuáles son los valores que no tiene sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.
8) En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. Su área es 1 u^2. Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.
9) Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. La tarifa mínima es de 0,50 euros, el tiempo máximo de aparcamiento es de 2 horas, cada media hora más cuesta 0,90 euros, y cada fracción, 0,05 euros. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo que se espera va a estar aparcado el vehículo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.
10) Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 5 cm y de altura total del vaso 18 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?
11) La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:

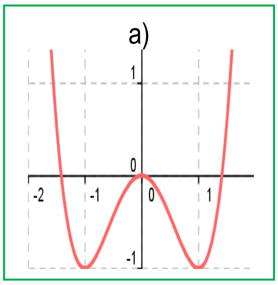


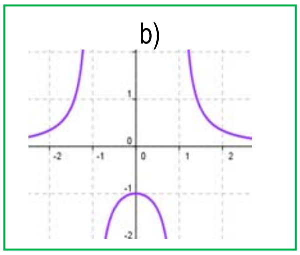
    a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
    b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
    c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
    d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
    e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
    f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
    g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable “distancia al punto de partida”, ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

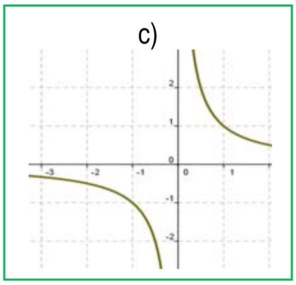
12) La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes de un equipo de baloncesto, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ¿Y la relación entre la edad y la altura? Escribe tres correspondencias que sean funcionales y tres que no.

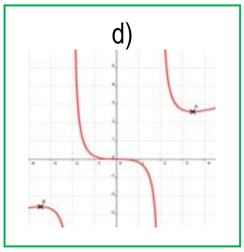
2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

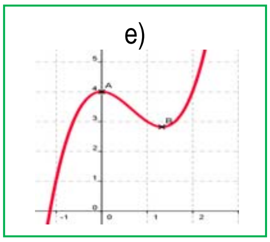
13) Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas. Indica su dominio, si es continua (o puntos de discontinuidad si los hubiera), si es simétrica y tipo de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodo (si lo hubiera)…

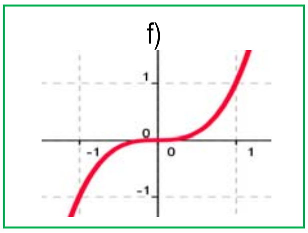


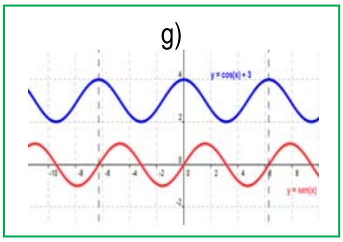


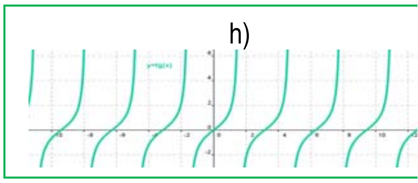












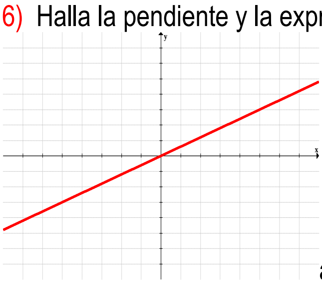
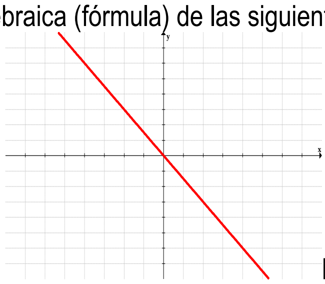
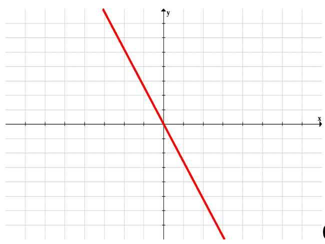
3. TIPOS DE FUNCIONES

14) El consumo medio de agua al día por habitante es de 150 litros. Representa gráficamente el consumo de agua de una persona a lo largo de una semana.

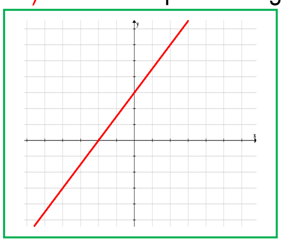
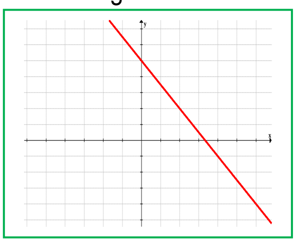
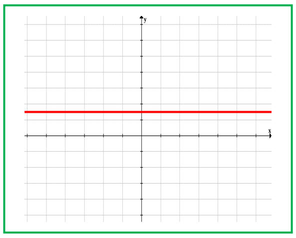
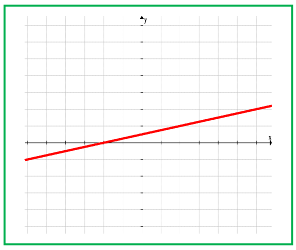
15) Representa en tu cuaderno, estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales siguientes:

a) $y = 1{,}25 \cdot x$; b) $y = (3/5) \cdot x$; c) $y = 3 \cdot x$; d) $y = 0{,}5 \cdot x$;

16) Halla la pendiente y la expresión algebraica (fórmula) de las siguientes rectas:


a.

b.

c.

17) Halla la expresión algebraica de las siguientes rectas:

18) Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 5, –4, y 1/3 respectivamente.

19) ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = x? ¿Y la recta y = –x?

20) ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

21) Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $x = 3$

22) Un metro de cierta tela cuesta 2,05 €, ¿cuánto cuestan 7 metros? ¿Y 20 m? ¿Y 15,2 m? ¿Cuánto cuestan "*x*" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

23) Dibuja en papel cuadriculado la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
b) Tomando valores de abscisa negativa.
c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "*x*"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.

24) A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25) Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

26) Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$. La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos *q* unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

27) Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos *p* unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.

28) Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal a la derecha y 4 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

29) Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$ b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c. $y = x^2 - 5$

d. $y = x^2 - 6x + 16$ e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f. $y = -x^2 + 12x - 26$

g. $y = x^2 - 10x + 17$ h. $y = -x^2 + 2x - 4$ i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

30) Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (3, 1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.
b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–4, –2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

31) Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

32) Halla la función cuadrática determinada por los puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Represéntala gráficamente.

33) Halla la función polinómica que pasa por los puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) y (3, 23).

34) Halla la función polinómica determinada por los puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula las diferencias sucesivas y dibuja la gráfica.

35) Se hacen pruebas midiendo la distancia que recorre un avión desde que toca tierra en una pista de aterrizaje. Los datos están en la tabla adjunta. Existe alguna función polinómica que se ajusta a esos datos. Si la hay, escribe su fórmula.

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36) En una fábrica los precios de los cables de acero dependen de los diámetros y viene dado el precio década metros en euros en la tabla siguiente. ¿Existe alguna función polinómica que se ajuste perfectamente a esos datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Precio (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37) Dada la tabla siguiente, ¿se puede ajustar exactamente una recta? Considera si algún dato es erróneo y si es así, corrígelo.

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

38) Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a) $y = \frac{-1}{x}$ b) $y = \frac{5}{x}$ c) $y = \frac{1}{2x}$

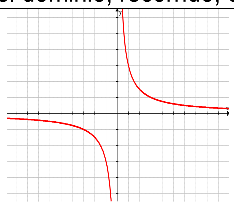
d) $y = \frac{3}{8x}$ e) $y = \frac{-5}{3x}$ f) $y = \frac{-12}{5x}$

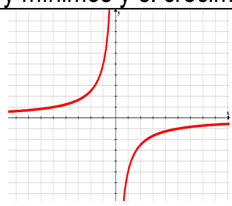
39) Describe lo que sucede cuando varía el valor de *k*. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

40) Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a) (5, 3)	b) (2, –1)	c) (1/2, 6)
d) (10, 4)	e) (*a*, 1)	f) (1, *b*)

41) Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:


a.


b.

c. $y = \frac{9}{2x}$ d. $y = \frac{-5}{3x}$ e. $y = \frac{-0,3}{x}$

42) Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

$y = \frac{5}{x}$ $y = \frac{5}{x} + 3$ $y = \frac{5}{x} - 3$

$y = \frac{-12}{x}$ $y = \frac{-12}{x-3}$ $y = \frac{-12}{x+3}$

$y = \frac{3}{x}$ $y = \frac{3}{x-1} + 4$ $y = \frac{5x-2}{x-1}$

43) Describe lo que sucede cuando varían los parámetros *a* y *b* en las hipérbolas del ejercicio anterior.

44) Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y=\frac{5}{x}$:

a) $y=\frac{10}{x-5}+3$ b) $y=\frac{1}{x+4}+8$ c) $y=\frac{100}{x+10}+1$

d) $y=\frac{10}{2x-4}-7$ e) $y=6-\frac{4}{x}$ f) $y=\frac{20}{5-x}-2$

45) Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

46) Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

47) Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y=\frac{2x-4}{x+5}$ b) $y=\frac{3-5x}{x+2}$ c) $y=\frac{4x-12}{x-3}$

d) $y=\frac{6x+8}{1-x}$ e) $y=\frac{7x+5}{x-4}$ f) $y=\frac{6x+10}{2x-1}$

48) Representa la gráfica de la función: $y = 7-\frac{15}{x+3}$. A) ¿Cuando x crece, "*y*" tiende a 7? ¿Tiene una asíntota horizontal *y* = 7? B) ¿Si *x* se acerca a –3, la *y* crece? ¿Tiene una asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza si esta hipérbola se ajusta a los valores de la actividad resuelta de la tabla:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

49) Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1,4.
Observa que los valores de "*y*" aumentan mucho más deprisa: mientras que los valores de "*x*" aumentan de 1 en 1 los valores de *y* se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

50) En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y=x^2$ (función potencial) e $y=2^x$ (función exponencial), con valores de "*x*" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

51) Utilizando la calculadora, haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y=e^x$, $y=e^{-x}$.

52) Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.
  j. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
  k. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
  l. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

53) Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

54) Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y=2^x$ b) $y=2^{x+1}$ c) $y=2^{x-1}$.

55) Conociendo la gráfica de la función $f(x)=2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x)=2^x-3$ y $h(x)=2^{x-3}$.

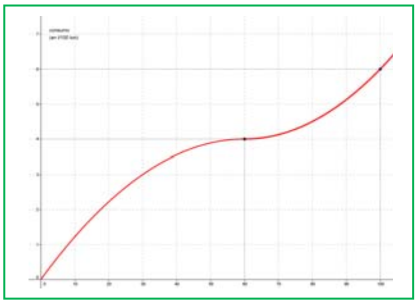
CURIOSIDADES. REVISTA

Utiliza el ordenador para dibujar funciones

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Funciones

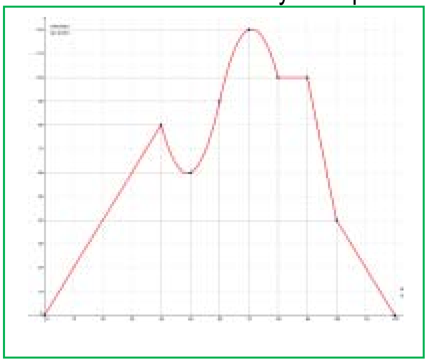
1. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y en él, los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está: $A(2, 4)$; $B(0, 1)$; $C(-3, 0)$; $D(2, -1'5)$; $E(1'5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$.
2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.
3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:
   $A(0, 3)$; $B(0, 1'7)$; $C(0, -1)$; $D(0, -4)$. ¿Qué tienen en común todos ellos?
4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de abscisas. ¿Qué tienen en común?
5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.
6. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:
   a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.
   b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.
   c) A cada circunferencia del plano se le asocia un diámetro.
7. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.
   a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.
   b) Dibuja la gráfica.
   c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3,14).
   d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?
8. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:
   a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?
   b) ¿A qué altura habrá una temperatura de −30º C?
   c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?
   d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?
9. Dibuja la gráfica de la función *parte entera*: $y = E(x)$, que indica el número entero menor, más próximo a x, así, por ejemplo, E(2'3) = 2.
10. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?
11. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.
12. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.
13. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "*a*" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.
14. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica. Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.
   a) ¿Cuál es la variable dependiente?
   b) ¿Y la independiente?
   c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?
   d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?



15. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.
 Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):
    a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 · tiempo
    b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo
    c) A partir del día 45: altura = 135.

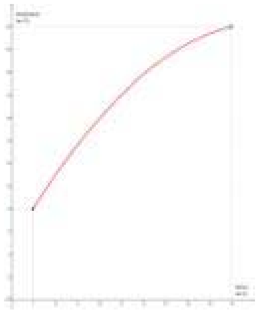
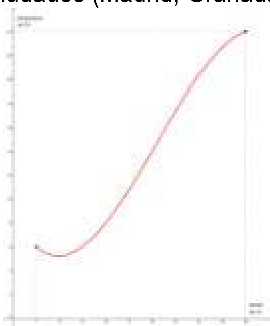
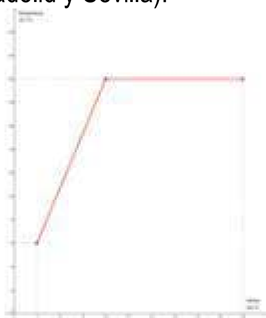
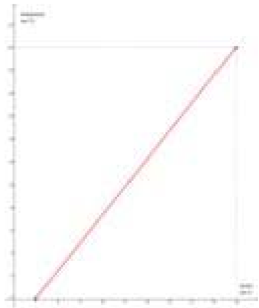
Características de una función.

16. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.
17. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?
d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?
e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?
f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

18. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1’20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:
    a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
    b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
    c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.
19. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):

    a) Explica la monotonía de todas las gráficas.
    b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?
    c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?
    d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h, en Sevilla a veces se ha mantenido constante, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

20. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma: Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es: $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto. Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$. Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$. Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

    a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
    b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
    c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
    d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
    e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
    f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
    g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

21. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el capítulo: continuidad, monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

    a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, si\, x > 0 \\ -x, si\, x < 0 \end{cases}$.
    b) Opuesto e inverso del número *x*: $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Tipos de funciones

22. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada en el origen 6.
23. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ y $C(12, 15)$.
24. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.
25. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. ¿Cómo son?
26. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.
27. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:
    a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es 5.
    b) Pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(0, 9)$.
    c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.
    d) Pasa por los puntos $C(-2, 7)$ y $D(-3, 10)$.
    e) Pasa por el punto (a, b) y tiene de pendiente m.
28. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:
    a) De pendiente 2 y ordenada en el origen 0.
    b) Pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 1)$.
    c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto $(4, 5)$.
29. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

    a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$
30. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

    a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

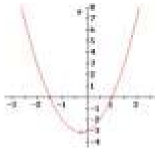
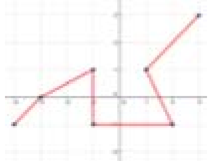
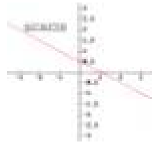
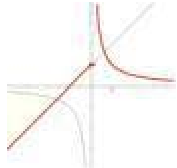
    Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$
31. Ajusta una función polinómica a los datos de la tabla:

x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	1	5	11	19	29	41	55

32. Dibuja las gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso los puntos de discontinuidad y las asíntotas.
33. Dibuja las gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

2. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

x	y
0	5
1	7
2	32
3	41

b)

x	y
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2

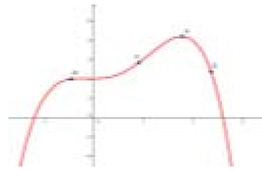
c)

x	y
–3	1
–1	2
0	3
2	4

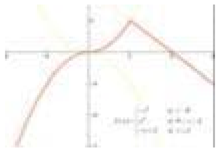
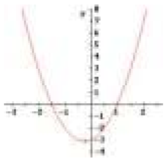
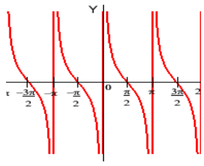
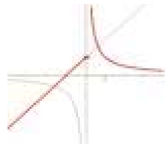
d)

x	y
0	1
1	2
4	3
0	4

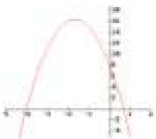
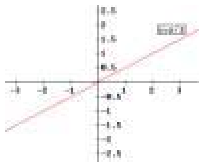
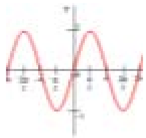
3. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:
a) b) c) d



4. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

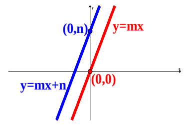
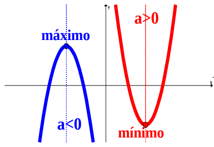
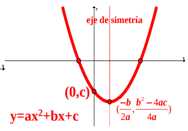
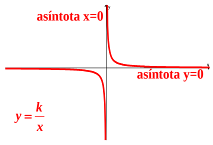
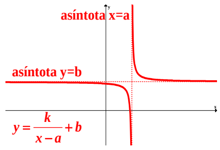
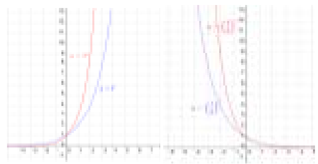
a)  b)  c)  d) 

5. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:

a)  b)  c)  d)

6. La única función afín que, además, es lineal es:
a) $y = –7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = –4x + 7$ d) $y = –6x – 9$
7. La única función cuadrática es:
a) $y = –8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –2x^3 – 3x$
8. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (2, 0) es:
a) $y = –2x^2$ b) $y = x^2 – 4x + 4$ c) $y = –2x^2 + 4x$ d) $y = –x^2 + 4x – 2$
9. La hipérbola de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ es:
a) $y = 5 + 8/(x – 3)$ b) $y = 3 + 6/(x – 5)$ c) $y = –5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$
10. La única función exponencial es:
a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$

RESUMEN

		Ejemplos
Función	Relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra.	$y = 2x + 3$
Características de las funciones	Continuidad. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Simetría. Periodicidad.	La recta $y = 2x + 3$ es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni es simétrica, ni periódica.
Función polinómica de primer grado: Rectas: $y = mx$, $y = mx + n$	Se representan mediante **rectas**: Hay dos tipos: Funciones lineales $y = m \cdot x$, Funciones afines: $y = m \cdot x + n$,	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas $y = ax^2 + bx + c$	Se representan mediante parábolas: Vértice: $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{4a})$ Eje de simetría: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$. Puntos de corte con el eje OX: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Punto de corte con el eje OY: $x = 0$, es el punto $(0, c)$	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas $y = k/x$.	$\lvert \boldsymbol{k} \rvert$: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. **Dominio y recorrido:** $\Re - \{0\}$ Discontinua en $x = 0$. **Simetría:** Función impar. **Asíntotas:** Las rectas $x = 0$ e $y = 0$	
Hipérbolas $\boldsymbol{y = \frac{k}{x-a} + b}$	Traslación de la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector (a, b). Dominio: $\Re - \{a\}$ Asíntotas: $x = a$; $y = b$.	
Función exponencial	$y = b^x$. Si $b > 1$ es creciente Si $0 < b < 1$ es decreciente	

CAPÍTULO 7: ESTADÍSTICA. AZAR Y PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ESTADÍSTICA

1) Queremos realizar un estudio estadístico sobre el tiempo dedicado al estudio por el alumnado de ESO de Madrid. Para ello se seleccionan adecuadamente 100 alumnos. Indica cuál es la población, cuál la muestra, qué tamaño tiene la muestra y quién sería un individuo.

2) Quieres pasar una encuesta para conocer, lo mismo que en el problema anterior, el tiempo dedicado al estudio, en este caso el de los compañeros y compañeras de tu centro escolar. ¿Se la pasarías sólo a las chicas? ¿Sólo a los chicos? ¿Preguntarías a los mejores de la clase? ¿A los de peores notas? Indica el criterio que seguirías para seleccionar la muestra a la que preguntar.

3) Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de frecuencias absolutas de los valores obtenidos al tirar un dado con las frecuencias relativas y porcentajes, y con frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Resultados	Frecuencias absolutas
1	17
2	12
3	17
4	15
5	21
6	14

4) Con la tabla de valores del ejercicio anterior, dibuja en tu cuaderno el diagrama de frecuencias relativas, el polígono de frecuencias absolutas acumuladas y el diagrama de sectores.

5) Haz un estudio estadístico preguntando a tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y represéntala en un diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias y un diagrama de sectores.

6) Selecciona una muestra entre tus compañeros y compañeras y realiza un estudio estadístico sobre el deporte que más le gusta a cada uno. Haz la representación que sea más sencilla de interpretar.

7) Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

a) Calcula la temperatura media, la moda y la mediana.
b) Utiliza el ordenador para comprobar el resultado.

8) Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos. ¿Influyen en la moda? ¿Y en la mediana? ¿Y en la media?

9) Se ha lanzado un dado 100 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

a) Calcula la media, moda y mediana.
b) Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

10) Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41

a) Calcula la media, la mediana y la moda.
b) Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.
c) Repite tú los lanzamientos, ahora sólo diez veces, y calcula de nuevo la media, mediana y moda.

11) Utiliza el ordenador para calcular la media, la mediana y la moda de la siguiente tabla de frecuencias absolutas, que indica el número de hijos que tienen 200 familias entrevistadas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

12) Dadas las temperatura en una ciudad de un ejercicio anterior:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

a. Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.
b. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

13) Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil. de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

14) Utiliza el ordenador para dibujar el histograma de la actividad 11.

15) Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas con cuatro intervalos: [20, 25), [25, 30), [30, 35) y [35, 40). Calcula las marcas de clase. Dibuja el histograma de frecuencias absolutas. Calcula la media y la desviación típica. Calcula gráficamente la mediana y los cuartiles.

16) Haz un estudio estadístico preguntando a tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y represéntala en un diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias y un diagrama de sectores.

2. DATOS BIDIMENSIONALES

17) Con la tabla de valores del ejemplo, construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la variable *X* ("Color de pelo") y la variable *Y* ("Color de ojos") por separado, como variables unidimensionales.

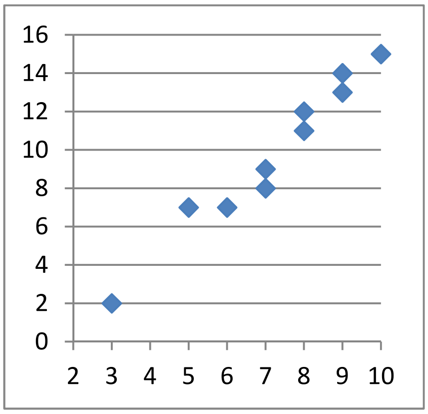
18) Completa la siguiente tabla y exprésala en forma de tabla de doble entrada, primero con frecuencias relativas y luego con frecuencias absolutas.

(x_i, y_i)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
(0, 1)	12	
(1,.2)	14	
(2,3)	14	

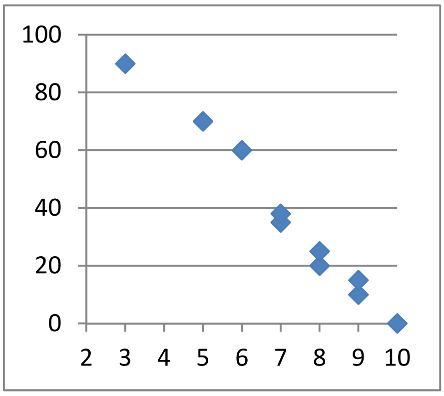
19) Completa la siguiente tabla de frecuencias conjunta y exprésala en frecuencias de pares (x_i, y_i), tanto con frecuencias relativas como absolutas.

20) María ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas, y ha obtenido: –0,05, 0,98 y –0,99, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudarla a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?

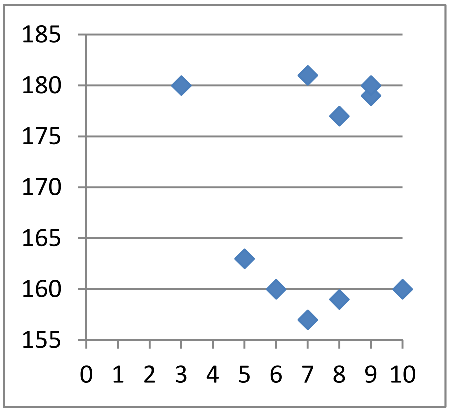
A



B



C



21) Haz una encuesta entre tus compañeros de clase. Con ella vas a realizar un trabajo de investigación y presentar un informe. Elige con cuidado las preguntas. Vas a preguntar a cada uno de tus compañeros seleccionados, la muestra, dos preguntas, como por ejemplo lo que mide su mano y su nota en lengua, pero a ti pueden interesarte otras cuestiones muy distintas.

Lo primero que vas a hacer es tabular las respuestas y confeccionar dos tablas de frecuencias absolutas. Luego completa esas mismas tablas con las frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas. Haz representaciones gráficas de esas frecuencias: de barras, de líneas, de sectores.

Calcula las medias, modas y medianas así como recorrido, desviación típica, cuartiles, intervalo intercuartílico… Representa los datos en una tabla de doble entrada y dibuja la nube de puntos. Calcula el coeficiente de correlación. Presenta un informe de este trabajo.

3. AZAR Y PROBABILIDAD

22) Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

- La superficie de las comunidades autónomas españolas.
- Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
- El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
- Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
- Saber si el próximo año es bisiesto.

23) Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".
24) Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".
25) Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.
26) En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.
27) Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.
28) Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.
29) Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?
30) ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?
31) Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.
32) En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción (noA = no sacarlo), y B = *sacar un as* en la segunda extracción (no B = no sacarlo). ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Y la de no sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?
33) En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen 2 ases*" y la de "*no sale ningún as*".
34) En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.
35) Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.
36) Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.
37) Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que p(A) = 5/36 (2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que p(B) = 8/36 ((1,3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: p(A y B); p(A o B); p(A y noB); p(noA y B); p(noA y noB). c) Calcula p(A/B); p(A/noB); p(noA/B).
38) Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo p(I) = 0,7.
39) En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: p(A) = 0,95; p(B) = 0,97 y p(C) = 0,98. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.
40) Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0,5 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.
41) Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).
42) Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0,27		0,56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0,58		1

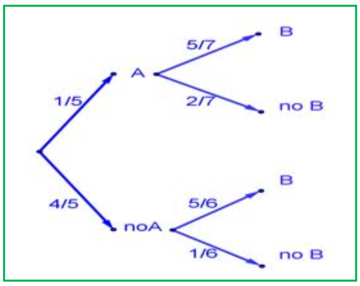
a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.
b) Determina las siguientes probabilidades: p(V y C); p(V y U); p(M y C); p(M y U); p(V); p(M); p(C) y p(U).
c) Calcula p(U/V); p(C/V); p(V/U); p(V/C). ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

43) Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

44) Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A	
B	0,4	0,2	0,6
No B	0,15	0,25	0,4
	0,55	0,45	1

45) Dado el diagrama de árbol, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



46) Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

47) Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: p(M/C)

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: p(noM/C).

CURIOSIDADES Y REVISTA

Caballero de la Meré

Calcula las probabilidades de: A) “sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado”. B) Al tirar dos dados “sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas”

Galileo

Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9? Calcula las probabilidades de cada una de las sumas y la de sacar 10 y de sacar 9.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Estadística

1. En una clase se mira el color de los ojos de cada alumno y alumna y se obtiene lo siguiente:

N := negro; A := azul y V := verde.

N, N, A, V, N, V, A, N, A, N, V, A, A, N, N, N, V, A, N, N, A, N, V, N, N, A, N, A, N, N.

Haz una tabla de frecuencias absolutas, representa los valores en un diagrama de sectores y calcula la moda.

2. Las notas de un conjunto de alumnos de 4º son:

2, 10, 7, 8, 1, 0, 3, 5, 6, 9, 2, 4, 1, 6, 9, 10, 5, 6, 7, 8, 3, 1, 0, 1, 5, 9, 10, 9, 8, 7.

Haz una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Calcula la media, la mediana y la moda.

Calcula la desviación típica y los cuartiles.

3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.

Calcula la media, la mediana y la moda.

4. Se han lanzado cuatro monedas 100 veces y anotado el número de veces que ha salido cara. Los resultados están reflejados en la tabla siguiente:

Número de caras	0	1	2	3	4
Número de veces	7	25	36	26	6

Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas acumuladas, un diagrama de líneas de frecuencias relativas y un diagrama de sectores de frecuencias absolutas.

Calcula la media y la desviación típica.

Calcula la mediana y los cuartiles.

5. Para conocer la distribución de un cierto país de las personas según su edad se ha recogido una muestra de diez mil personas y los valores obtenidos vienen reflejados en la tabla siguiente:

Edades	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65,100)
Número de personas	900	1000	900	1500	1300	1200	1300	900	1000

Utiliza las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Representa un histograma de frecuencias absolutas. Cuidado: Los intervalos no son todos iguales. Recuerda: El área de los rectángulos debe ser proporcional a las frecuencias.

Calcula la media y la desviación típica.

Calcula la mediana y los cuartiles de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

6. Con los datos del problema anterior calcula el intervalo [media – desviación típica, media + desviación típica]. ¿Cuántas personas están en dicho intervalo? ¿Qué porcentaje? Calcula también el intervalo [media – 2*desviación típica, media + 2*desviación típica] y [media – 3*desviación típica, media + 3*desviación típica]. Si la distribución fuera normal habría en el primer intervalo un 68 % de la muestra, en el segundo un 95 % y en el tercero más de un 99'7 %. Compara tus resultados con éstos.
7. Con los mismos datos calcula el intervalo intercuartil, e indica cuántas personas están en dicho intervalo y qué porcentaje.
8. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 200 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	40	30	20	40	50	20

Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Representa un histograma de frecuencias relativas. Cuidado: Los intervalos no son todos iguales.

Calcula la media y la desviación típica.

Calcula la mediana y los cuartiles de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

9. Dos fabricantes de baterías de coches ofrecen su producto a una fábrica al mismo precio. La fábrica quiere elegir la mejor. Para ello escoge una muestra de 60 baterías de cada marca y obtiene de cada una los meses que ha funcionado sin estropearse. Obtiene la siguiente tabla:

Vida de la batería en meses	20	22	24	26	28	30	32
Marca A	2	7	13	16	12	8	2
Marca B	1	4	17	20	15	3	0

¿Qué marca crees que elegirá?

Para tomar la decisión, calcula la media, la moda y la mediana para cada marca.

Si aún no te decides, calcula el recorrido, la desviación típica, el intervalo [m – s, m + s] y el intervalo intercuartil.

10. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Hazles una pregunta con datos numéricos, como por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calzan, el número de libros que lee en un mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música… Representa los datos obtenidos en una tabla. Y haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:

Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Dibuja un diagrama de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

Calcula la media, la mediana y la moda

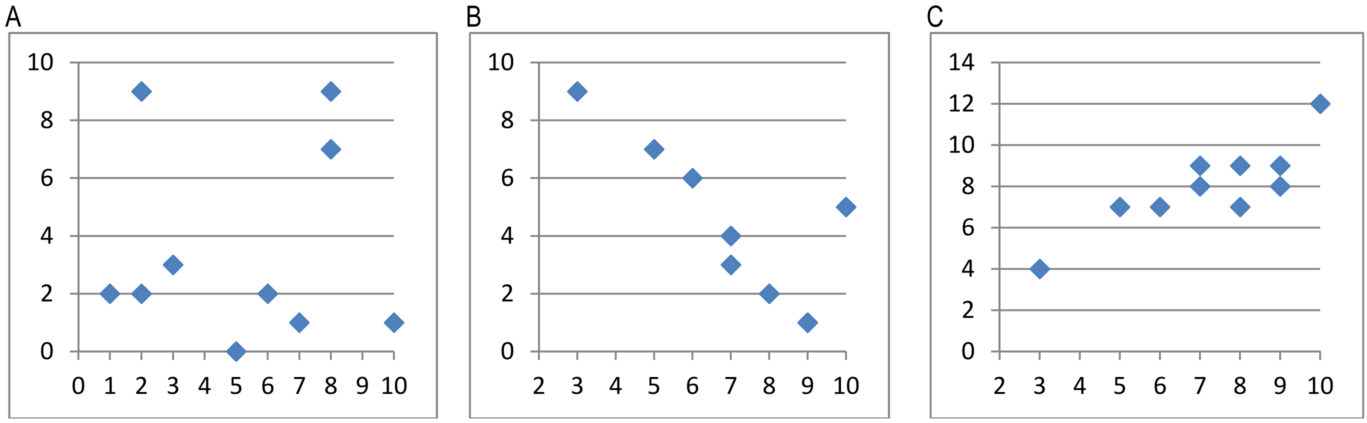
Calcula la varianza y la desviación típica

Calcula los cuartiles y el intervalo intercuartil.

Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Coeficiente de correlación

11. Andrés ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas, y ha obtenido: –0,8, 0,85 y 0,03, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudar a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?



Probabilidad

12. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?
13. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.
14. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.
15. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.
16. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.
17. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.
18. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.
19. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!
20. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso “Salga cara y un número par”. B al suceso “Salga cruz y un número primo” y C al suceso “salga un número primo”. Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.
21. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

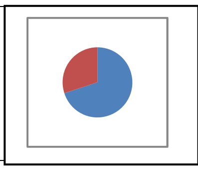
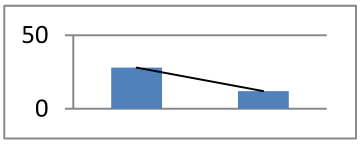
22. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.
23. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.
24. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.
25. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.
26. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.
27. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.
28. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.
29. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?
30. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?
31. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.
32. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.
33. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

AUTOEVALUACIÓN

Con los datos siguientes, 1, 5, 2, 8, 9, 4, 7, 7, 5, 7, calcula:

1. La media:
   a) 5 b) 5'5 c) 6 d) 7
2. La mediana:
   a) 5 b) 5'5 c) 6 d) 7
3. La moda:
   a) 5 b) 5'5 c) 6 d) 7
4. La desviación típica:
   a) 2 b) 2,3 c) 2,5 d) 2,6
5. El intervalo intercuartil
   a) 3 b) 2,75 c) 4 d) 2
6. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:
   a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36
7. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8
8. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8
9. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:
   a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4
10. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es siempre correcta:
    a) P(A) + P(noA) = 1
    b) P(A y B) = P(A) · P(B)
    c) P(A o B) = P(A) + P(B)

RESUMEN

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Población y muestra</td><td>Población: Todo el conjunto de individuos sobre el que se hace el estudio. Muestra: Una parte de esa población.</td><td>Para conocer la intención de voto, la población es todo el país, y se selecciona una muestra</td></tr>
<tr><td>Frecuencia absoluta, relativa y acumulada</td><td>Frecuencia absoluta: Número de veces que se ha obtenido ese resultado. Frecuencia relativa: Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total. Frecuencia acumulada: Se obtiene sumando las frecuencias anteriores.</td><td><table><tr><th></th><th>Fr. Absoluta</th><th>Fr. Relativa</th><th>Fr. Acumulada Absoluta</th></tr><tr><td>A</td><td>28</td><td>0'7</td><td>28</td></tr><tr><td>B</td><td>12</td><td>0'3</td><td>40</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráficos estadísticos</td><td>Diagrama de barras
Diagrama de líneas
Diagrama de sectores
</td><td></td></tr>
<tr><td>Media</td><td>Media = m = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$</td><td>Con: 8, 4, 6, 10 y 10
Media = 38/5 = 7'6</td></tr>
<tr><td>Moda</td><td>Es el valor más frecuente</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Mediana</td><td>Deja por debajo la mitad</td><td>4 < 6 < 8 < 10 = 10. Me = 8.</td></tr>
<tr><td>Varianza y Desviación típica</td><td>Varianza = $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - m^2$. s = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - m^2}$</td><td>Varianza = 5,4.
s = 2,33.</td></tr>
<tr><td>Cuartiles</td><td>Q1 deja por debajo la cuarta parte. Q3 deja por debajo las tres cuartas partes. Intervalo intercuartil = Q3 – Q1.</td><td>Q1 = 6; Q3 = 10; Intervalo intercuartil = Q3 – Q1 = 4.</td></tr>
<tr><td>Histograma</td><td>El área de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia .</td><td></td></tr>
<tr><td>Correlación</td><td>El coeficiente de correlación, ρ, mide la relación entre dos variables. Es un número entre –1 y 1.</td><td>ρ = 1 → correlación perfecta positiva
ρ = –1 → correlación perfecta negativa
ρ = 0 → correlación nula
ρ ∈ (0, 1) → correlación positiva
ρ ∈ (–1, 0) → correlación negativa</td></tr>
<tr><td>Suceso</td><td>Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o sucesos posibles.
Un suceso es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.</td><td>Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso obtener múltiplo de 3 = {3, 6}</td></tr>
<tr><td>Probabilidad</td><td>Límite al que tienden las frecuencias relativas.
Si los sucesos elementales son equiprobables entonces:
p = casos favorables / casos posibles.</td><td>P(5) = 1/6.
P(sacar múltiplo de 3) = 2/6</td></tr>
<tr><td>Asignación de probabilidades</td><td>Suceso contrario: p(X) + p(noX) = 1.
Sucesos dependientes: p(A y B) = p(A) · p(B/A).
Sucesos compatibles: P(A o B) = p(A) + p(B) – p(A y B).</td><td>P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6.
P(5 o múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6
P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 =2/36</td></tr>
</table>