CAPÍTULO 2: POTENCIAS Y RAÍCES.

1. OPERACIONES CON POTENCIAS

Recuerda que la **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base: $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factores}} \ldots \cdot a \quad (n > 0)$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

Recuerda:

$a^0 = 1$

$1^m = 1$

$(-1)^m = 1 \quad m$ par

$(-1)^n = -1 \quad n$ impar

$0^n = 0$

$a = a^1$

Ya conoces las propiedades de las operaciones con potencias, que vamos a repasar. En este capítulo veremos que si el exponente o si la base es un número negativo o fraccionario, esas propiedades se mantienen.

1.1. Producto de potencias

- Con la misma base

El producto de potencias de la misma base es otra potencia con la misma base y de exponente, la suma de los exponentes: $b^m \cdot b^n \cdot b^p = b^{m+n+p}$

Ejemplo:

$(-5)^4 \cdot (-5)^{-3} \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-3)+2+(-6)} = (-5)^{-3} = 1/(-5)^3 = 1/\text{—-}125$

- Con el mismo exponente

El producto de potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base se calcula multiplicando las bases, elevada al mismo exponente: $a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$

Ejemplo:

$(-3)^2 \cdot (5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-4)^2 = [(-3) \cdot (5) \cdot (-1) \cdot (-4)]^2 = (+60)^2 = 3600$

1.2. Cociente de potencias

- Con la misma base

El cociente entre dos potencia de la misma base es otra potencia con la misma base y su exponente se calcula restando los exponentes: $c^m : c^n = c^{m-n}$

Ejemplo:

$(-12)^7 : (-7)^2 = (-12)^{7-2} = (-12)^5$

- Con el mismo exponente

Para dividir potencias con el mismo exponente, se dividen las bases y el resultado se eleva al mismo exponente:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ejemplo:

$18^4 : 3^4 = (18/3)^4 = 6^4$

Ejemplo:

$(5)^3 : (-14)^3 = (5/-14)^3$

- Potencias de exponente entero negativo

Una potencia de base real $a \neq 0$, y exponente natural $n < 0$ es el inverso de la misma con exponente positivo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

La expresión a^{-n} puede ser el resultado de dividir dos potencias de la misma base, ya que: $a^x : a^y = a^{x-y}$ si $x < y \quad (x-y) < 0$.

Ejemplo:

$6^3 : 6^8 = 6^{3-8} = 6^{-5} = 1/6^5$

1.3. Potencia de un producto

La potencia de un producto puede calcularse realizando primero el producto y elevando el resultado a dicha potencia o bien, elevando cada uno de los factores a dicha potencia y realizando después el producto: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$

Ejemplo:

$[(-2) \cdot (+5) \cdot (-4)]^3 = (+40)^3 = +64000 = (-2)^3 \cdot (+5)^3 \cdot (-4)^3 = (-8) \cdot (+125) \cdot (-64) = +64000$

1.4. Potencia de un cociente

La potencia de un cociente puede calcularse efectuando primero el cociente y elevando el resultado a dicha potencia, o bien elevar dividendo y divisor a la potencia y después efectuar el cociente: $(a : b)^m = a^m : b^m$

Ejemplo:

$[(5) : (-4)]^2 = (5/-4)^2 = (-1{,}25)^2 = +1{,}5625 = (5)^2 : (-4)^2 = 25 : 16 = 1{,}5625$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Potencia de otra potencia

Al elevar una potencia a otra potencia obtenemos una potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes: $((d)^m)^n = d^{m\cdot n}$

Ejemplo:

$((-5)^3)^6 = (-5)^{3x6} = (-5)^{18}$

Actividades resueltas

- *Se cuenta que el inventor del ajedrez se lo mostró al rey Shirham de la India, que se entusiasmó tanto que le ofreció regalarle lo que quisiera. El inventor pidió un grano de trigo para la primera casilla, dos para la segunda, 4 para la tercera, y así duplicando la cantidad en cada casilla. ¿Cuántos granos de trigo habría que poner en la última casilla, en la* 64?

Observamos que el número de granos de trigo de la casilla n es 2^{n-1} por lo que debemos calcular 2^{63}. Calculamos $2^2 = 4$. Luego: $(2^2)^2 = 2^4 = 16$ $((2^2)^2)^2 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256$ $(((2^2)^2)^2)^2 = (2^8)^2 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65536$
$((((2^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{16})^2 = 2^{32} = 65536 \cdot 65536 = 4294967296$
$(((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{32})^2 = 2^{64} = 4294967296 \cdot 4294967296 = 18446744073709551616$
Y ahora, para calcular 2^{63} podemos dividir potencias de la misma base:
$2^{63} = 2^{64}/2 = 9223372036854775808$ granos de trigo, un número enorme y difícil de manejar.
Para calcular el número total de granos de trigo observamos que la suma de granos hasta la casilla n es 2^n por lo que entonces debemos calcular 2^{64}, que estimando 1200 granos por kg dan poco más de 15 billones de Tm y eso corresponde a la producción mundial de 21685 años. ¡Imposible que el rey tuviera tanto trigo!

Actividades propuestas

1. Determina el signo de las potencias: a) $(-1)^9$ b) $(5)^{12}$ c) $(-12)^{-5}$ d) $(8)^{-4}$
2. Expresa en forma de una única potencia: a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$ b) $(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$
3. Expresa en forma de potencia: a) $(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$
4. Expresa en forma de potencia: a) $(-8)^9 : (-8)^3$ b) $(-3)^2 : (-3)^7$
5. Expresa en forma de potencia: a) $(+75)^4 : (-3)^4$ b) $(-5)^8 : (8)^8$
6. Expresa en forma de potencia: a) $((-2)^5)^6$ b) $((7)^3)^{-5}$

2. POTENCIA DE BASE RACIONAL

La potencia de un número racional es otro número racional cuyo numerador y denominador quedan elevados a dicha potencia: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{16}{625}$

2.1. Potencias de base racional y exponente negativo

El resultado de elevar un número racional a una potencia negativa es otra potencia cuya base es el número racional inverso, elevado al mismo exponente, positivo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Ejemplo: $(4/9)^{-5} = (9/4)^5$

2.2. Producto de potencias de base racional

Se mantienen las propiedades de las potencias de base un número natural.

Con la misma base

El resultado de multiplicar potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y exponente la suma de los exponentes: $(a/b)^m \cdot (a/b)^n \cdot (a/b)^p = (a/b)^{m+n+p}$

Ejemplo:

$(2/5)^3 \cdot (2/5) \cdot (2/5)^{-4} \cdot (2/5)^5 = (2/5)^{3+1+(-4)+5} = (2/5)^5$

- Con el mismo exponente

El resultado de multiplicar potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base es el producto de las bases, elevada al mismo exponente: $(a/b)^m \cdot (c/d)^m \cdot (e/f)^m = [(a/b) \cdot (c/d) \cdot (e/f)]^m$

Ejemplo:

$(-2/3)^4 \cdot (1/4)^4 \cdot (3/5)^4 = [(-2/3) \cdot (1/4) \cdot (3/5)]^4 = (-6/60)^4 = (-1/10)^4$

Actividades propuestas

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$
8. Expresa como única potencia: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8}$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$
9. Expresa como única potencia: a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$

2.3. Cociente de potencias de base racional

- Con la misma base

El resultado de dividir potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y el exponente la diferencia de los exponentes: $(a/b)^m : (a/b)^n = (a/b)^{m-n}$

Ejemplo:

$$(-1/3)^3 : (-1/3)^4 = (-1/3)^{3-4} = (-1/3)^{-1}$$

- Con el mismo exponente

El resultado de dividir potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base es el cociente de las bases, elevada al mismo exponente: $(a/b)^m : (c/d)^m = [(a/b) : (c/d)]^m$

Ejemplo:

$$(-3/4)^{-5} : (7/8)^{-5} = [(-3/4) : (7/8)]^{-5} = (-24/28)^{-5} = (-6/7)^{-5} = (-7/6)^5$$

2.4. Operaciones combinadas con potencias

Ejemplo: $$\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^{-5} \cdot (-3)}{(-3)^8 \cdot (-3)^{-6}} = \frac{(-3)^{3-5+1}}{(-3)^{8-6}} = \frac{(-3)^{-1}}{(-3)^2} = (-3)^{-1-2} = (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Ejemplo: $$\frac{\left(5^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4\right)^3}{(9^2 \cdot 4^2)^3} = \frac{\left[(5 \cdot (-2) \cdot 3)^4\right]^3}{\left[(3^2)^2 \cdot (2^2)^2\right]^3} = \frac{\left[(-30)^4\right]^3}{\left[\left[(3 \cdot 2)^2\right]^2\right]^3} = \frac{\left[(-30)^4\right]^3}{\left[6^4\right]^3} = \left[(-5)^4\right]^3 = (-5)^{12} = 244140625.$$

Actividades propuestas

10. Calcula: a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$
11. Calcula: a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$ b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$
12. Calcula: a) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5}$ b) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

3.1. Números grandes y números pequeños

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \le a \le 9$$

Si el exponente n es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente n es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

$3420000000000 = 3{,}42 \cdot 10^{12}$ $0{,}000000000057 = 5{,}7 \cdot 10^{-11}$

Actividades resueltas

- *En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de los grandes que son, podemos usar la notación científica.*
  Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 9223372036854775808922337203685477580 8 que da un poco de mareo.
- *Escribe en notación científica*: 2^{16}, 2^{32} y 2^{64}

$2^{16} = 65536 \approx 6{,}5 \cdot 10^4$ $2^{32} = 4294967296 = 4 \cdot 10^9$ $2^{64} = 18446744073709551616 = 1{,}8 \cdot 10^{19}$

3.2. Operaciones con notación científica

- Suma o diferencia

Para realizar sumas y restas, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

- *Para calcular* $4 \cdot 10^8 + 2{,}3 \cdot 10^6 - 6{,}5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5: $4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6{,}5 \cdot 10^5$

Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6{,}5) = 4016{,}5 \cdot 10^5 = 4{,}0165 \cdot 10^8$

- Producto

El producto de expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar los números decimales y sumar los exponentes de base 10.

Ejemplo:

$2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}36 \cdot 10^6 = (2{,}5 \cdot 1{,}36) \cdot 10^{5+6} = 3{,}4 \cdot 10^{11}$

- Cociente

El cociente de dos expresiones en notación científica es el resultado de dividir los números decimales y restar los exponentes de base 10.

Ejemplo:

$5{,}4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5{,}4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1{,}35 \cdot 10^2$

Actividades resueltas

- *Para hacer el cociente para calcular* 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica:

$$2^{63} = 2^{64} / 2 = 1{,}8 \cdot 10^{19} / 2 = 0{,}9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}.$$

Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

Actividades propuestas

13. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.
14. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.
15. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $0{,}000257 + 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $200000000 - 3{,}5 \cdot 10^6 + 8{,}5 \cdot 10^5$
16. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(1{,}3 \cdot 10^5) \cdot (6{,}1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4{,}7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-4})$
17. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1{,}5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6{,}15 \cdot 10^{-7})$
18. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km³ y el volumen de agua dulce es de 35000000 km³. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.
19. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)
20. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm³. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

4. RAÍCES

4.1. Radicales de índice cualquiera

La raíz enésima de un número *a* es un número *x* que al elevarlo a *n*, da como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

La raíz **cuadrada** de un número real no negativo *a* es un único número no negativo *x* que elevado al cuadrado nos de "*a*": $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$, $a \geq 0$, $x \geq 0$.

Recuerda:
n = índice de la raíz
a = radicando
$x = \sqrt[n]{a}$ raíz

Observación

No confundas resolver una **ecuación**, $x^2 = 9$, que tiene dos raíces, 3 y –3, con calcular una raíz, como $\sqrt{9}$ que es **únicamente** 3.

Imagina que lío tan horrible sería calcular $\sqrt{9} + \sqrt{1} + \sqrt{4}$ si el resultado pudiera ser:

3 + 1 + 2 = 6 o bien 3 – 1 – 2 = 0 o bien –3 + 1 – 2 = –4 o bien 3 – 1 + 2 = 4

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo $\sqrt[3]{-1} = -1$, pues $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Actividades resueltas

- *¿Cuánto mide el lado de una habitación cuadrada embaldosada con* 144 baldosas de cuadradas de 25 cm de lado?

Cada lado tendrá $\sqrt{144} = 12$ baldosas, que miden 25 cm, luego medirá $12 \cdot 25 = 300$ cm = 3 m de largo.

- *En un depósito cúbico caben* 1000 cubos de 1 dm³, ¿cuánto mide su arista? ¿Y si caben 12167 cubos?

Calculamos $\sqrt[3]{1000}$ = 10. La arista mide 10 dm. Calculamos ahora $\sqrt[3]{12167}$= 23. La arista mide 23 dm porque 23 · 23 · 23 = 12167.

- *Calcula* $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{-1000}$.

Las raíces de radicando negativo e índice impar, si existen: $\sqrt[3]{-64}$ = –4; $\sqrt[3]{-8}$ = –2; $\sqrt[3]{-27}$ = –3; $\sqrt[3]{-1000}$ = –10.

4.2. Potencias de exponente fraccionario

Se define $x^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{x}$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Por tanto, la potencia $x^{\frac{m}{n}}$ puede expresarse en forma de radical, de manera que *n* será el índice de la raíz y *m* el exponente del radicando. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

Ejemplo:

$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Las propiedades de las potencias de exponente fraccionario coinciden con las de las potencias de exponente un número natural.

Actividades resueltas

- *Simplifica los radicales* $\sqrt[4]{2^{12}}$, $\sqrt[10]{7^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

Escribimos el radical como potencia de exponente fraccionario y simplificamos las fracciones:

$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$

$\sqrt[10]{7^{15}} = 7^{\frac{15}{10}} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{7^3} = 7 \cdot \sqrt{7}$

- *Calcula* $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{27000}$ factorizando previamente los radicandos

$\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22$ $\qquad$ $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

- *Calcula* $25^{0,5}$; $32^{\frac{3}{5}}$ y $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

$25^{0,5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ $\qquad$ $32^{\frac{3}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{5 \cdot 3}{5}} = 2^3 = 8$ $\qquad$ $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 2}} = 3^3 = 27$

4.3. Extracción de factores de un radical

Tenemos $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ con *m* > *n*, para extraer factores de la raíz realizamos el cociente: *m* dividido entre *n* tiene de cociente *p* y de resto *r*: *m* = *n* · *p* + *r*. El resultado es $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{n \cdot p + r}} = x^{\frac{n \cdot p + r}{n}} = x^{p + \frac{r}{n}} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

Si *m* > *n*, $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

Ejemplo: $\sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad$ $\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Actividades propuestas

21. Calcula todas las soluciones: a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$
22. Expresa en forma de radical: a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$
23. Extrae los factores posibles en cada radical: a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

4.4. Operaciones con radicales

Como los radicales se pueden escribir como potencias, tienen las propiedades que ya conoces de las potencias.

- **Raíz de un producto**

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores: $\sqrt[n]{x\cdot y\cdot z}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[n]{z}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 64}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}=2\cdot 3\cdot 4=24$

- **Raíz de un cociente**

La raíz de un cociente es igual al cociente de la raíz del dividendo y la raíz del divisor: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Ejemplo: $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}}=\frac{2}{3}$

- **Raíz de una raíz**

La raíz de una raíz es igual a otra raíz con el mismo radicando y cuyo índice es el producto de los índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\cdot m]{x}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}=\sqrt[3\cdot 2]{64}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

4.5. Operaciones combinadas

Ejemplo:

$x^{2/3}\cdot y^{1/3}=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^2\cdot y}$

Ejemplo: $\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}}=\frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}}=\frac{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

> **Recuerda**
>
> Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.
>
> $10=\sqrt{100}=\sqrt{64+36}$ que es distinto de:
>
> $\sqrt{64}+\sqrt{36}=8+6=14$.

Actividades propuestas

24. Expresa en forma de producto o de cociente: a) $\sqrt[3]{a\cdot b}$ b) $\sqrt{2\cdot 5\cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$

25. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

26. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt{2^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$

27. Simplifica la expresión: a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

4.6. Raíces cuadradas

Ya sabes que:

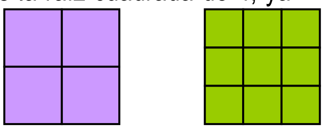
La raíz cuadrada **exacta** de un número *a* es otro número *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a}=b\Leftrightarrow b^2=a$$

Ejemplo:

- Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2=4$, y por tanto decimos que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, es decir:

$$\sqrt{4}=2.$$



Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Podemos construir un cuadrado de lado 3 con 9 cuadrados pequeños, por tanto como $3^2 = 9$ entonces:

$$\sqrt{9} = 3.$$

- Al escribir $\sqrt{64} = 8$ se lee que la *raíz cuadrada* de 64 es 8.

Al signo √ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 64 y se dice que el **valor de la raíz** es 8.

Ejemplo:

- Sabemos que el área de un cuadrado es 121 cm^2, ¿cuánto vale su lado?

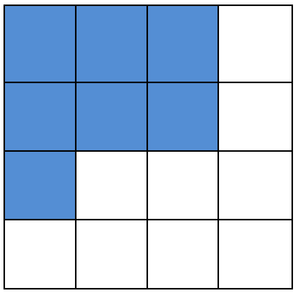
Su lado valdrá la raíz cuadrada de 121. Como $11^2 = 121$, entonces la raíz cuadrada de 121 es 11. El lado del cuadrado es 11.

Raíces aproximadas

Ejemplo:

- ¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños?

Observa que se puede formar un cuadrado de lado 2, pero sobran 3 cuadrados pequeños, y que para hacer un cuadrado de lado 3 faltan 2 cuadrados pequeños.



El número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.

Es más, aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas.

Pero podemos afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Como 4 es un cuadrado perfecto y $\sqrt{4} = 2$, y 9 es también otro cuadrado perfecto y $\sqrt{9} = 3$, los números, 5, 6, 7, y 8 no son cuadrado perfectos y su raíz cuadrada es un número irracional.

Con más dificultad se puede aproximar esos valores, así $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$, (Multiplica 2,6 por sí mismo, y 2,7 por sí mismo, y comprueba que se verifica la desigualdad) o podemos obtener más cifras decimales:

$2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, o bien $2{,}64575131 < \sqrt{7} < 2{,}64575132$.

Podemos encontrar un valor aproximado de la raíz.

Para calcular raíces cuadradas puedes utilizar la calculadora, con la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$

Es importante conocer los cuadrados perfectos, pues mentalmente, te ayuda a saber entre qué valores enteros está la raíz cuadrada que quieres calcular.

Observa que:

El cuadrado de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo. Luego no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Actividades propuestas

28. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.
29. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

   a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

30. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

   a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

31. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles números irracionales y cuáles no existen:

   a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

	POTENCIAS Y RAÍCES	*Ejemplos*
Producto y cociente de potencias	En el producto de potencias con la misma base se suman los exponentes. En el cociente se restan los exponentes Con el mismo exponente: En el producto, se multiplican las bases y se eleva el resultado al mismo exponente. En el cociente se dividen las bases y se eleva el resultado al mismo exponente	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potencia de un producto y de un cociente	La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevados a dicha potencia $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ La potencia de un cociente es igual al cociente del dividendo y el divisor elevados a dicha potencia: $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6/(-2)^6$
Potencia de otra potencia	$((d)^m)^n = d^{mxn}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potencia de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notación científica: operaciones	$a \cdot 10^{\pm n}$ siendo 1 a 9. + n para grandes números –n para pequeños números	$320000000 = 3{,}2 \cdot 10^8$ $0{,}0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicales: raíces de índice cualquiera	$\sqrt{49} = 7;\ \sqrt[3]{-216} = -6;\ \sqrt[3]{64} = 4;\ \sqrt[4]{81} = 3;\ \sqrt[5]{-32} = -2$	
Potencias de exponente racional	Una potencia con exponente racional puede expresarse en forma de raíz cuyo índice es el denominador del exponente y el radicando queda elevado al numerador del exponente: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Extracción de factores de un radical	Si $m = n \cdot c + r$ entonces $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7} = 8^2 \cdot \sqrt[3]{8}$
Operaciones con radicales	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$; $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2} =$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Potencias

1. Expresa en forma de única potencia:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$ b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$ c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$ d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$

e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$ f) $(-18)^4 : (-3)^4$ g) $(6)^5 : (6)^2$ h) $(-3)^2 : (-3)^4$

2. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$

b) [(2)7 : (-3)7] · (– 4)3 · (–4)4

c) $\dfrac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$

d) $\dfrac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. Expresa en forma de potencia de exponente positivo: $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$
4. Expresa en forma de única potencia: $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$
5. Expresa en forma de única potencia: $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$
6. Expresa en forma de única potencia:

a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$ b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$ c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$
d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$ e) $((-4/3)^{-3})^5$ f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

7. Expresa en forma de única potencia:

a) $$\frac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$$

b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$

c) $$\frac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$$

8. Expresa en forma de notación científica:
   a) 140000000 b) 32800 c) 71000000000000000 d) 0,0000075
   e) –18000000 f) 0,00000000042 g) –0,009 h) 0,00000000007
9. Busca información expresada en notación científica sobre:
   a) La distancia entre la Tierra y la Luna b) Unidad de masa atómica
   c) Km que corresponden a un año luz d) Un gúgol d) La longitud de onda de los rayos cósmicos
10. Realiza las operaciones y expresa el resultado en notación científica:
   a) $4 \cdot 10^3 + 2,4 \cdot 10^6 - 1,7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$ b) $2,3 \cdot 10^{-5} - 3,45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$
   c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 \cdot 10^2$ d) $1,8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$
11. La estrella Sirio está a unos 8,611 años luz de nuestro planeta. Expresa en metros, mediante notación científica la distancia que recorrería una nave espacial que realizara un trayecto de ida y vuelta a Sirio. (*Recuerda*: Un año luz, la longitud que recorre la luz en un año, es aproximadamente igual a $9,46 \times 10^{12}$ km (9 460 730 472 580,8 km con más aproximación))
12. La masa de un electrón en reposo se estima en $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, la de un protón es de $1,672 \cdot 10^{-27}$ kg, y la de un neutrón $1,64 \times 10^{-27}$ kg. Calcula la masa de un átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protones, seis electrones y 6 + 2 = 8 neutrones. (El C_{14} es un isótopo que tiene dos neutrones más que el carbono normal y que se utiliza para datar).
13. Calcula y expresa en notación científica:
   a) $0,00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7,45 \cdot 10^{-5} - 6,32 \cdot 10^{-4}$ b) $5 \cdot 10^6 - 2,8 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^5$
   c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^2 + 1,4 \cdot 10^{-3}$ d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2,7) \cdot 10^{-3} + 4,2 \cdot 10^{-6}$
14. Expresa el resultado de esta operación en notación científica: a) $\dfrac{2,4 \cdot 10^{-3} - 1,5 \cdot 10^{-4}}{0,025 + 3 \cdot 10^{-4}}$ b) $\dfrac{(1,3 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^3)}{(4 \cdot 10^5) \cdot (2,3 \cdot 10^6)}$
15. Se estima que existen 40 millones de bacterias en un gramo de tierra. Expresa en notación científica de forma aproximada el número de bacterias que existen en unos camiones que están descargando 50 toneladas métricas de arena en una playa.
16. Si $x = 240000$; $y = 0,00058$; $z = 7,2 \cdot 10^6$: Calcula y expresa en notación científica a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^7$ c) $3x - 5y$
17. Arquímedes, en su tratado *El arenario* cuenta una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Vamos a estimarlos ahora por otro procedimiento. Estimamos cuántos granos de arena necesitamos para tener un gramo de arena. Te parece que 50 granos de arena. Se estima que la masa de la Tierra es de: M_T=5 980 000 000 000 000 000 000 000 000 g = $598 \cdot 10^{25}$ g

   Calcula de forma aproximada el número de granos de arena que hay en toda la Tierra.
18. Vemos en Internet que la masa de Marte es de 639E21 kg, que la masa de Júpiter es de 1,898E27 kg, y que la masa de la Tierra es de 5,972E24 kg. a) Calcula cuántas veces cabría la Tierra en el planeta Júpiter. b) Calcula la relación entre la masa de la Tierra y la de Marte.
19.

Raíces

20. Calcula: a) $\sqrt{12100}$ b) $\sqrt[3]{-0,008}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{0,49}$
21. Calcula: a) $\sqrt[4]{2,0736}$ b) $\sqrt[5]{-0,00001}$ c) $\sqrt{33640000}$ d) $\sqrt[3]{-2,7 \cdot 10^{-6}}$

22. Expresa en forma de raíz: a) $(-4)^{3/5}$ b) $7^{1/6}$ c) $(21)^{1/3}$ d) $(-5)^{2/3}$

23. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[5]{6^3}$ b) $\sqrt{(-7)^5}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

24. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt{3^3 \cdot 10^5 \cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{6^9 \cdot 2^5}$ c) $\sqrt[4]{x^{11} \cdot y^5}$ d) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^6}$

25. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt[3]{a^7 \cdot b^3 \cdot c^{-6}}$ b) $\sqrt{5^{-5} \cdot 3^{-6}}$ c) $\sqrt[4]{10^5 : 6^8}$ d) $\sqrt{x^3 \cdot x^8 \cdot x}$

26. Simplifica: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^5}$ c) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot y^4}{x^8 \cdot y}}$ d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

27. Expresa en forma de producto: a) $\sqrt{3 \cdot 50 \cdot 12}$ b) $\sqrt[3]{5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6}$ c) $\sqrt{8 \cdot 3^4 \cdot 9}$ d) $\sqrt[3]{a^8 \cdot b^2 \cdot c^6}$

28. Expresa en forma de cociente: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$ b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

29. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt{\sqrt{48}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$ d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

30. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{2^4}$ b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right) \cdot 5^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$ d) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$

31. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[2]{x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$ c) $\sqrt{5 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^6}$ d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7 \cdot 3^{10}}$

32. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{(-4)^5 \cdot \sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3 : \sqrt{2^5}}}$ c) $\frac{\left((-7^3)\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ y $(12)^7 : (12)^5$
   a) 6 y 12^2 b) $1/6$ y 12^5 c) $-1/6$ y 12^2
2. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ y $(-8)^7 : (5)^7$
   a) $(-30)^4$ y $(-3)^7$ b) 30^4 y $(-8/5)^7$ c) 30^4 y $(-3)^7$
3. El resultado de las operaciones siguientes es: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ y $((-5)^{2/3})^6$
   a) $(-2)^{15}$; (-1) y $(5)^{8/3}$ b) -2^{15}; (-1) y -5^4 c) $(-2)^{15}$; (-1) y $(-5)^4$
4. El resultado de las operaciones siguientes es: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ y $(10^5)^{-2}$
   a) $1/512$; $1/16$ y $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ y $1/10^{10}$
5. El resultado de las operaciones siguientes es: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ y $(-2/5)^4$
   a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ y $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 y $2^4/5^4$
6. El resultado de las operaciones siguientes es: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$
   a) 1 b) 2/3 c) –2/3 d) $(2/3) \cdot (-3/2)$
7. Las expresiones $3{,}1 \cdot 10^8$ y 0,0000000095 corresponden a :
   a) 3100000000 y $9{,}5 \cdot 10^{-10}$ b) 310000000 y $9{,}5 \cdot 10^{-10}$ c) 310000000 y $9{,}5 \cdot 10^{-9}$
8. El resultado de esta operación es: $(0{,}00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2{,}5 \cdot 10^5$
   a) 124,5 b) 2407,5 c) 107,5 d) 140,75
9. El resultado de las operaciones siguientes es: $\sqrt[3]{-1331}$; $\sqrt{256}$ y $\sqrt[5]{-1}$
   a) –11, 16, –1 b) 11, 16, 1 c) –11, –16, –1
10. Las siguientes expresiones corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ y $(-5)^{4/3}$
    a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-(5^4)}$
11. El resultado de extraer factores de estos radicales es: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ y $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$
    a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $2 \cdot 5^3 \sqrt{2 \cdot 5}$ b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $50\sqrt{10}$ c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $(-5) \cdot {}^3\sqrt{(-5)}$
12. Las operaciones siguientes $\sqrt[3]{-(5):12}$ y $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$ pueden expresarse:
    a) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[9]{-18}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[6]{-18}$ c) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ y $\sqrt[9]{18}$