Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

3º B de ESO

Capítulo 3: Sucesiones

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-042249

Fecha y hora de registro: 2014-05-08 18:00:21.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso

Revisor: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

¿Qué tienen en común conceptos tan dispares como el número de conejos hijos engendrados por una pareja de conejos, la estructura de un copo de nieve o el interés que obtenemos al depositar determinada cantidad de dinero en una entidad financiera?

Detrás de estos casos nos encontramos con el concepto de sucesión. Las sucesiones numéricas tienen gran importancia y utilidad en muchísimos aspectos de la vida real, alguno de los cuales irás descubriendo a lo largo de este tema.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1.1. Definiciones

Una **sucesión** de números reales es una secuencia ordenada de números.

Ejemplo:

- Las siguientes secuencias son sucesiones:
  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…
  b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
  c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

Se llama **término de una sucesión** a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión.

Para representar los diferentes términos de una sucesión se usa una misma letra con distintos subíndices. Estos subíndices indican el lugar que ocupa ese término en la sucesión.

Ejemplo:

- En la sucesión a) tendríamos que: $a_5 = 5$, ya que es el término de la sucesión que ocupa el quinto lugar.
- En la sucesión b), el tercer término, se denotaría b_3 y correspondería al 6
- En la sucesión c), por ejemplo $c_2 = \frac{1}{2}$

Lo realmente importante a la hora de nombrar los términos de una sucesión es el subíndice porque denota el lugar que ocupan en la sucesión. Las letras con las que se designa la sucesión son distintas para sucesiones distintas y suelen ser letras minúsculas.

Se llama **término general de una sucesión** al término que ocupa el lugar *n*-ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión (por ejemplo *a*) con subíndice *n*: (a_n)

Ejemplo:

- En los casos que estamos considerando, los términos generales de las sucesiones serían: a_n, b_n y c_n.

Si nos fijamos, los valores que toman los subíndices son números naturales, pero los términos de la sucesión no tienen por qué serlo, es decir, los valores que toma la sucesión son números reales. Por eso, podemos definir sucesión de números reales de forma más rigurosa como:

Definición:

Se llama **sucesión de números reales** a una aplicación que hace corresponder a cada número natural un número real.

Actividades resueltas

- *En las sucesiones anteriores, observamos que:* $a_{1003} = 1003$, $b_{12} = 24$ *y* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) –1, –2, –3, –4,…

b) 1, 4, 9, 16,…

c) 1, 3, 5, 7,…

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.

3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9,8 m/s (aproximadamente 10 m/s).. Si en el primer segundo su velocidad es de 15 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 20 segundos? Representa gráficamente esta función.

Tiempo en segundos	1	2	3
Velocidad en m/s	15		

1.2. Formas de definir una sucesión

Existen varias formas de definir una sucesión:

1. **Dando una propiedad que cumplan los términos de esa sucesión**

Ejemplo:

- Sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10,…
- Sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11,..
- Sucesión de los números naturales acabados en 9: 9, 19, 29, 39, ...
- Sucesión de los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16,…

2. **Dando su término general o término *n*-ésimo**:

Es una expresión algebraica en función de *n.*

Ejemplo:

- $a_n = n^2 + 3$

Sabiendo esto, podemos construir los términos de la sucesión sin más que sustituir *n* por los números naturales. Así, tendríamos:

$$a_1 = 1^2 + 3 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 3 = 19$$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $d_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$

$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. **Por una ley de recurrencia**:

Es una expresión que permite obtener un término a partir de los anteriores

Ejemplo:

- La sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

conocida como sucesión de Fibonacci se obtiene con la siguiente ley de recurrencia:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

Actividades resueltas

- *Sea la sucesión de término general:* $a_n = 2n + 3$.

  Sus cinco primeros términos son: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$

- *Dada la sucesión en forma recurrente:* $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

  Sus cuatro primeros términos son:

$a_1 = 1$ (ya viene dado),

$a_2 = 1 + 3 = 4$,

$a_3 = 4 + 3 = 7$,

$a_4 = 7 + 3 = 10$

Actividades propuestas

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2n^2+1$

b) $b_n = \dfrac{4n-1}{3n}$

c) $c_1 = 1,\ c_n = 3c_{n-1} + 5$

d) $d_1 = 2,\ d_2 = 5,\ d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,\ldots\}$

b) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35,\ldots\}$

c) $\{2, 4, 6, 8, 10,\ldots\}$

d) $\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{7}, \dfrac{9}{8},\ldots\right\}$

6. En una sucesión el primer término es 2 y los demás se obtienen sumando 4 al término anterior. Hallar los 6 primeros términos de la sucesión.

7. Un satélite artificial se puso en órbita a las 17 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 87 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta *n*-ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de otra órbita anterior. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 20 días más tarde a las 14 horas?

Nº de órbitas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora en la que la ha completado						

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Ejemplo:

- *Alicia tiene en siete días un examen de Matemáticas. Decide prepararlo haciendo cada día tres ejercicios más que el día anterior. Empieza hoy haciendo dos ejercicios. Si escribimos los ejercicios que va haciendo Alicia a medida que pasan los días, son:* 2, 5, 8, 11, 14,…

Observamos que los términos de la sucesión van aumentando en una cantidad constante: 3. Este tipo de sucesiones se llaman *progresiones aritméticas*.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama **diferencia de la progresión** y se suele denotar con la letra *d*.

De otra forma, en una progresión aritmética se verifica:

$$a_{i+1} - a_i = d$$

siendo *i* cualquier número natural

Es decir, cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, *d*:

$$a_{i+1} = a_i + d$$

Ejemplo:

- La sucesión formada por los números naturales: {1, 2, 3, 4, 5,…} es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 1 al término anterior.

Actividades resueltas

- Si $a_1 = 3$ y $d = 2$, vamos a ver cómo se escriben los cinco primeros términos de la progresión aritmética:

  $a_1 = 3$,

  $a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$

  $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$

  $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$

  $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

Actividades propuestas

8. Señala razonadamente si la siguiente sucesión es una progresión aritmética:

{1, 10, 100, 1000, 100000, ….}.

9. Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es –2.

2.1. Término general de una progresión aritmética

Una progresión aritmética, al igual que ocurre con todas las sucesiones, queda perfectamente definida si conocemos su término general. Vamos a calcularlo utilizando la definición que hemos visto de progresión aritmética y suponiendo conocidos el primer término a_1 y la diferencia de la sucesión, d.

a_1 dado

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

…….

De forma general:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)\cdot d + d = a_1 + (n-1)\, d$

Por tanto, el **término general de una progresión aritmética** es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\, d}$$

Generalizando este resultado, podemos calcular el término general de una progresión aritmética conociendo d y otro término de la progresión, no necesariamente el primero:

Más general, el **término general de una progresión aritmética** es:

$$\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)\, d}$$

Siendo a_k el término de la progresión que ocupa el lugar k.

NOTAS

1. **Dependiendo del valor de *d*, nos podemos encontrar con distintos tipos de progresiones aritméticas:**
   a) Si $d > 0$, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores. Por ejemplo: {2, 4, 6, 8, …}
   b) Si $d < 0$, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores. Por ejemplo: {12, 9, 6, 3, …}
   c) Si $d = 0$, la progresión es constante, es decir, todos sus términos son iguales. Por ejemplo: {4, 4, 4, 4, …}

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. **Dependiendo de los datos que tengamos, calcularemos el término general de una progresión aritmética de una forma u otra:**

a) Si conocemos a_1 y d, hemos visto que: $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d$

b) Si conocemos un término cualquiera a_i y d, sabemos que: $a_n = a_k + (n - k)\ d$

c) Si conocemos dos términos cualesquiera a_r y a_s, nos faltaría la diferencia d para poder aplicar la fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

$$a_n = a_r + (n - r)\cdot d \quad \text{y que} \quad a_n = a_s + (n - s)\cdot d$$

podemos despejar d en función de r, s, a_r y a_s y nos queda: $d = \dfrac{a_r - a_s}{r - s}$

Actividades resueltas

- *Hallar el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es* 7 *y su diferencia también es* 7.

  Basta con sustituir en la fórmula dada: $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d = 7 + (n - 1)7 = 7 + 7n - 7 = 7n$.

- *Calcula el término que ocupa el lugar* 15 *en una progresión aritmética cuyo primer término es* 2 *y la diferencia es* 3.

  En este caso, $a_{15} = a_1 + (15 - 1)\cdot d = 2 + 14\cdot 3 = 2 + 42 = 44$.

- *Calcula el primer término de una progresión aritmética con* $a_5 = 6$ y $d = -2$.

  $a_5 = a_1 + (5 - 1)\cdot d$. Despejamos $a_1 = a_5 - 4d = 6 - 4\cdot(-2) = 14$.

Actividades propuestas

10. Dada una progresión aritmética dos de cuyos términos son: $a_3 = 4$ y $a_{10} = 18$:

a) Calcula su diferencia.

b) Calcula su término general.

11. Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y $a_{30} = 60$.

12. ¿Cuál es el término general de una progresión aritmética con $a_{22} = 45$ y $d = 3$?

13. Los lados de un pentágono están en progresión aritmética de diferencia 5. Sabiendo además que su perímetro es 65, calcula el valor de los lados.

14. Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 2 y de diferencia 3. Represéntalos gráficamente. Observa que su representación gráfica es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.

15. Calcula la expresión general de las progresiones aritméticas:

a) De diferencia d = 2,5 y de primer término 2.
b) De diferencia $d = -2$ y de primer término 0.
c) De diferencia $d = 1/3$ y de segundo término 5.
d) De diferencia $d = 4$ y de quinto término 1.

16. ¿Cuántos múltiplos de 7 están comprendidos entre el 4 y el 893?

2.2. Suma de los términos de una progresión aritmética

En una progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes es constante.

Es decir, si los subíndices naturales p, q, r y s verifican que $p + q = r + s$, entonces: $a_p + a_q = a_r + a_s$

La ***demostración*** de esta propiedad es muy sencilla:

$a_p + a_q = a_1 + d\cdot(p - 1) + a_1 + d\cdot(q - 1) = 2a_1 + d\cdot(p + q - 2)$
$a_r + a_s = a_1 + d\cdot(r - 1) + a_1 + d\cdot(s - 1) = 2a_1 + d\cdot(r + s - 2)$

Y como: $p + q = r + s$, entonces: $a_p + a_q = a_r + a_s$

Queremos calcular la suma de los n términos de una progresión aritmética, S_n. Es decir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma, tenemos que:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots\dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando estas dos igualdades término a término obtenemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots\dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como se observa, los subíndices correspondientes a cada par de términos entre paréntesis suman n+1, por lo que la suma de sus términos será siempre la misma, entonces:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots\dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n\cdot(a_1 + a_n)$$

Despejando S_n :

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

La **suma** de los n primeros términos de una **progresión aritmética** viene dada por:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}.$$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Suma los* 30 *primeros términos de la progresión aritmética:* a_n = {17, 13, 9, 5, 1, …}.

  Observamos que $d = -4$. Para aplicar la fórmula de la suma tenemos que calcular primero el término que ocupa el lugar 30, a_{30}:

  $a_{30} = a_1 + (n - 1)d = 17 + (30 - 1)\cdot(-4) = 17 + 29\cdot(-4) = -99$

  Entonces: $S_{30} = 30\cdot\dfrac{17+(-99)}{2} = -1230$

- *Halla la suma de los números impares menores que* 1000.

  Tenemos que tener en cuenta que los números impares forman una progresión aritmética de diferencia 2 y además: $a_1 = 1$, $n = 500$, $a_{500} = 999$

  Entonces: $S_{500} = 500\cdot\dfrac{1+999}{2} = 250000$.

Actividades propuestas

17. Suma los 10 primeros términos de la progresión aritmética: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}

18. Halla la suma de los 50 primeros múltiplos de 3.

19. En una sucesión aritmética de un número impar de términos el central vale 12, ¿cuánto valdrá la suma del primero más el último?

20. El dueño de un pozo contrata a un zahorí para conocer la profundidad a la que se encuentra el agua y éste dictamina que a 5 m hay agua en abundancia. Pide un presupuesto a un contratista, que le dice que el primer metro le costará 50 euros y por cada medio metro más 6 euros más que por el medio metro anterior. ¿Cuánto le costará el pozo si se cumplen las predicciones?

21. Antonio se ha comprado un móvil, pero no puede pagarlo al contado. Paga 60 euros cada semana, pero el vendedor le sube 5 euros cada semana en concepto de pago aplazado. Logra pagarlo en 10 semanas. ¿Cuánto le costó? ¿Cuánto pagó de más? ¿Qué porcentaje supone este recargo sobre el precio de venta?

22. Un nadador se entrena en una piscina de 50 m y quiere controlar las pérdidas de velocidad por cansancio. Cronometra en cinco días consecutivos los tiempos que tarda en hacer 2, 5, 8, 11, 14 largos. A) Halla el término general de la sucesión a_n que da los metros recorridos en el día n. B) ¿Cuántos metros habrá nadado en dichos cronometrajes?

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo:

- *Un padre planea meter en una hucha* 1 € *el día que su hijo recién nacido cumpla un año y duplicar la cantidad en cada uno de sus cumpleaños.*

  Es decir, la sucesión cuyos términos son el dinero que mete en la hucha cada año es: {1, 2, 4, 8, 16,…}.

Observamos que los términos de la sucesión van aumentando de forma que cada término es el anterior multiplicado por 2. Este tipo de sucesiones se llaman progresiones geométricas.

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina **razón de la progresión** y se suele denotar con la letra *r*. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ siendo *i* un número natural y siempre que a_i sea distinto de cero.

O lo que es lo mismo, cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón *r*:

$$\mathbf{a_{i+1} = a_i \cdot r}$$

Ejemplo:

- La sucesión: {1, 3, 9, 27, 81,…} es una progresión geométrica, ya que tomando dos términos cualesquiera consecutivos, siempre se obtiene el mismo cociente, que es 3, razón de la progresión.

$$3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 3$$

3.1. Término general de una progresión geométrica

Una progresión geométrica, por ser una sucesión, queda totalmente definida si conocemos su término general. Vamos a obtenerlo sin más que aplicar la definición de progresión geométrica:

$a_2 = a_1 \cdot r$
$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$
$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$
$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$
………
$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

Por tanto, el **término general de una progresión geométrica** es:

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Generalizando este resultado, podemos calcular el término general de una progresión geométrica conociendo *r* y otro término de la progresión, no necesariamente el primero:

Más general, el **término general de una progresión geométrica** es:

$$\mathbf{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$$

siendo a_k el término de la progresión que ocupa el lugar *k.*

Ejemplo:

- La sucesión $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ es una progresión geométrica.

NOTAS

1. **Dependiendo del valor de *r*, nos podemos encontrar con distintos tipos de progresiones geométricas:**
   a) Si $r > 1$, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores. Por ejemplo: {2, 4, 8, 16, …}
   b) Si $0 < r < 1$, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores. Por ejemplo: {90, 30, 10, 10/3, 10/9, …}
   c) Si $r < 0$, la progresión es alternada, es decir, sus términos van cambiando de signo según el valor de *n*. Por ejemplo: {–2, 4, –8, 16, …}
   d) Si $r = 0$, la progresión es la progresión formada por ceros a partir del segundo término. Por ejemplo: {7, 0, 0, 0, }
   e) Si $r = 1$, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: {2, 2, 2, 2 ,…}
2. **Dependiendo de los datos que tengamos, calcularemos el término general de una progresión geométrica de una forma u otra:**
   a) Si conocemos a_1 y r, hemos visto que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
   b) Si conocemos un término cualquiera a_k y *r*, sabemos que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$
   c) Si conocemos dos términos cualesquiera a_p y a_q, con a_p no nulo, nos falta conocer la razón *r* para poder aplicar la fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

$$a_n = a_p \cdot r^{n-p} \quad \text{y que} \quad a_n = a_q \cdot r^{n-q}$$

podemos despejar *r* en función de *p*, *q*, a_p y a_q y nos queda: $r = \sqrt[q-p]{\frac{a_q}{a_p}}$

Actividades resueltas

- *Hallar el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es* 7 *y su razón también es* 7.

  Basta con sustituir en la fórmula dada: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$.

- *Calcula el término que ocupa el lugar* 5 *en una progresión geométrica cuyo primer término es* 2 *y razón* 3.

  En este caso, $a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$.

- *Calcula el primer término de una progresión geométrica con* $a_3 = 6$ y $r = -2$.

  Despejamos a_1 de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ y tenemos: $a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$.

  Para $n = 3$, tenemos: $a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{6}{(-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Actividades propuestas

23. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 27 y el cuarto es 8.

24. El cuarto término de una progresión geométrica es 1/9 y la razón 1/3. Halla el primer término.

25. Halla el sexto término de la siguiente progresión geométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\}$

26. Dada una progresión geométrica dos de cuyos términos son: $a_3 = -8$ y $a_{11} = -2048$

a) Calcula su razón.

b) Calcula su término general.

27. Cierta clase de alga, llamada *clorella*, se reproduce doblando su cantidad cada dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su cantidad, y así sucesivamente. Si se tiene en el momento inicial un kilo, al cabo de dos horas y media hay dos kilos. A) Haz una tabla de valores en la que indiques para cada periodo de reproducción el número de kilos de *clorella*. B) Indica el término general. C) Al cabo de 4 días, han transcurrido 40 periodos, ¿consideras posible este crecimiento?

3.2. Producto de los términos de una progresión geométrica

En una progresión geométrica, el producto de dos términos equidistantes es constante.

Es decir, si los subíndices naturales p, q, t y s verifican que $p + q = t + s$, entonces: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

La demostración de esta propiedad es muy sencilla:

$$a_p \cdot a_q = a_1 \cdot r^{p-1} \cdot a_1 \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p-1} \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p+q-2}$$
$$a_t \cdot a_s = a_1 \cdot r^{t-1} \cdot a_1 \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t-1} \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t+s-2}$$

Y como: $p + q = t + s$, entonces: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

Queremos calcular el producto de los n términos de una progresión geométrica, P_n. Es decir:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Aplicando la propiedad conmutativa del producto, tenemos que:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicando estas dos igualdades:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \cdot (a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots\ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Como se observa, los subíndices correspondientes a cada par de términos entre paréntesis suman n+1, por lo que el producto será siempre el mismo en cada factor, entonces: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

Despejando P_n: $P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$

El signo será positivo o negativo dependiendo de la progresión.

El **producto** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** viene dado por:

$$\boldsymbol{P_n} = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

Actividades resueltas

- *Halla el producto de los siete primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es* $a_1 = -1/8$ y razón $r = 2$

  Observamos que todos los términos de la sucesión son todos negativos, por lo que el producto de un número par de términos es positivo y que el producto de un número impar es negativo. Calculamos a_7 para poder utilizar la fórmula deducida anteriormente:

  $a_7 = a_1 r^{n-1} = -- \quad 2^{7-1} = (-1/8) \cdot 2^6 = -8$

  Entonces: $P_7 = \pm\sqrt{[(-1/8)(-8)]^7} = -1$

Actividades propuestas

28. El primer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo 384. Halla la razón y el producto de los 8 primeros términos.

29. Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, …

3.3. Suma de los términos de una progresión geométrica

A) Suma de un número <u>limitado</u> de términos consecutivos de una progresión geométrica

Ejemplo:

- Juan ha comprado 20 libros, por el 1º ha pagado 1 €, por el 2º, 2 €, por el 3º, 4 €, por el 4º, 8 € y así sucesivamente. ¿Cómo podemos saber lo que ha pagado en total sin necesidad de hacer la suma?

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$. Se trataría de calcular: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$. Vamos a verlo en general, para una progresión geométrica cualquiera:

Queremos calcular: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
Para ello, multiplicamos esta igualdad por r:

$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$

Pero como: $a_2 = r \cdot a_1$
$a_3 = r \cdot a_2$
$a_4 = r \cdot a_3$
....
$a_n = r \cdot a_{n-1}$

La igualdad anterior queda:

$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

Restando:

$$\begin{array}{rcl} r \cdot S_n & = & a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n \\ - \quad S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ \hline \end{array}$$

$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$

$(r - 1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1 \qquad S_n = \dfrac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}$ siempre que $r \neq 1$, y como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Entonces:

$S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ siempre que $r \neq 1$.

La **suma** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** viene dada por:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \text{ siempre que } r \neq 1.$$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se considera $r \neq 1$ ya que si $r = 1$ la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1,\ldots\}$ y $S_n = n \cdot a_1$

Analicemos la suma según los distintos valores de r:

a) Si $|r| > 1$, los términos en valor absoluto crecen indefinidamente y el valor de S_n viene dado por la fórmula anterior.

b) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos cuando n es grande se aproxima a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, ya que si en $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, elevamos la razón $|r| < 1$ a una potencia, cuanto mayor sea el exponente n, menor será el valor de r^n y si n es suficientemente grande, r^n se aproxima a 0. Por eso,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

c) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos:$\{a_1, -a_1, a_1, -a_1,\ldots\}$ y S_n es igual a cero si n es par, e igual a a_1 si n es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores.

Actividades resueltas

- *Hallar la suma de los* 11 *primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es* –2 *y la razón* –3.

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{(-2)\left[(-3)^{11} - 1\right]}{-3-1} = -88574.$$

- *Hallar la suma de los* 7 *primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el séptimo término es* 20480*, el primero es* 5 *y la razón es* 4.

Ahora utilizamos la fórmula: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$

Sustituyendo:

$$S_7 = \frac{r\, a_7 - a_1}{r-1} = \frac{20480 \cdot 4 - 5}{4-1} = 27305.$$

Actividades propuestas

30. Un agricultor en su granja tiene 59049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizó la mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?

31. Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y $r = ½$

B) Suma de un número ilimitado de términos consecutivos de una progresión geométrica

¿Qué ocurrirá si repetimos el proceso anterior indefinidamente? Es decir, ¿qué ocurrirá si sumamos un número ilimitado de términos?

Dependiendo del valor de *r* será posible o no obtener la suma de un número ilimitado de términos:

a) Si $r = 1$, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ y si a_1 es positivo la suma de los términos será cada vez mayor (si fuera a_1 negativo sería la suma cada vez mayor en valor absoluto, pero negativa). Por tanto, si el número de términos es ilimitado, esta suma será infinita.

b) Si $|r| > 1$, los términos crecen indefinidamente y el valor de S_n para un número ilimitado de términos, también será infinito.

c) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos se aproxima cuando *n* es grande a $S_n \approx \dfrac{a_1}{1-r}$.

   Observamos que la suma no depende del número de términos, ya que al hacerse cada vez más pequeños, llega un momento en que no se consideran.

d) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ y S_n es igual a cero si *n* es par, e igual a a_1 si *n* es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores para un número finito de términos. Para un número de términos ilimitado no sabemos si es par o impar, con lo que la suma no se puede realizar a no ser que $a_1 = 0$, caso en que $S = 0 = \dfrac{a_1}{1-r}$. En el resto de los casos decimos que la suma de infinitos términos no existe pues su valor es oscilante.

e) Si $r < -1$, los términos oscilan entre valores positivos y negativos, creciendo en valor absoluto. La suma de sus infinitos términos no existe pues su valor también es oscilante.

En resumen,

La **suma** de un número **ilimitado** de términos de una **progresión geométrica** sólo toma un valor finito si $|r| < 1$, y entonces viene dada por: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$ En el resto de los casos, o vale infinito, o no existe pues oscila.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica cuyo primer término es* 4 *y la razón* 1/2.

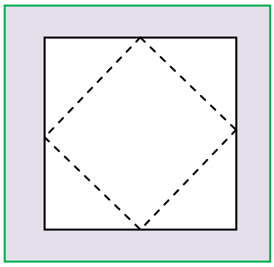
$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

- *En una progresión geométrica la razón es* 1/4 *y la suma de todos sus términos es* 8. *¿Cuánto vale el primer término?*

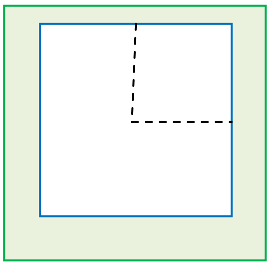
Despejamos a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ y: $a_1 = S\,(1 - r) = 8 \cdot (1 - 1/4) = 6$

Actividades propuestas

32. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…



33. Tenemos en la mano un cuadrado de área 1. Cortamos las cuatro esquinas por los puntos medios de los lados. El nuevo cuadrado, ¿qué área tiene? Dejamos los recortes encima de la mesa. ¿Qué área de recortes hay sobre la mesa? Con el nuevo cuadrado que tenemos en la mano efectuamos la misma operación de cortar las cuatro esquinas y dejarlas sobre la mesa, y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? Halla la suma de las infinitas áreas de recortes así obtenidas.



34. De nuevo tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayo lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crecen o disminuyen? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Aplicaciones de las progresiones geométricas

Fracción generatriz

El curso pasado estudiaste cómo pasar de un decimal periódico puro o periódico mixto a una fracción. Ahora vamos a utilizar las progresiones geométricas para que comprendas mejor el proceso.

Ejemplo:

- *Si tenemos un **número decimal periódico puro**, lo podemos escribir como:*

$$2,\widehat{37} = 2 + 0,37 + 0,0037 + 0,000037\ldots$$

O lo que es lo mismo:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot 100} + \frac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

donde los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuya suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Por tanto:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

- *Si tenemos un **número decimal periódico mixto**, se utiliza un proceso similar:*

$$1,32\widehat{8} = 1,32 + 0,008 + 0,0008 + \ldots$$

O lo que es lo mismo:

$$1,32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000\cdot 10} + \frac{8}{1000\cdot 10\cdot 10} + \ldots$$

En este caso, los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{10} < 1$.

Por tanto:

$$1,32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0,32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Con este proceso estamos ilustrando el concepto de fracción generatriz como aplicación de las progresiones geométricas, pero a efectos prácticos, es más cómodo efectuarlo según el proceso visto.

Capitalización compuesta

El interés compuesto lo estudiarás detenidamente en el capítulo 6, pero ahora es interesante que sepas que entonces vas a usar las progresiones geométricas para calcularlo, y que tienes una hoja de cálculo para hacer las operaciones.

Si depositamos en una entidad financiera una cantidad de dinero C_0 durante un tiempo t y un rédito r dado en tanto por uno, obtendremos un beneficio: $I = C_0\cdot r\cdot t$ llamado **interés.**

La principal característica de la capitalización compuesta es que los intereses que se generan en un año, pasan a formar parte del capital inicial y producen intereses en los periodos siguientes.

Entonces:

- Al final del *primer año*, el capital será el capital inicial C_0 junto con los intereses producidos durante ese año. Es decir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Al final del *segundo año*, el capital que tendremos será el capital que teníamos al finalizar el primer año más los intereses producidos ese segundo año. Es decir:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observando los capitales obtenidos: C_1, C_2, …, C_n concluimos que se trata de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$. Por tanto:

- El *año n-ésimo*, tendremos:

El capital final obtenido después de n años dado un capital inicial C_0 y un rédito r dado en tanto por uno, es: $\mathbf{C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n}$

Actividades resueltas

- *Veamos la fracción generatriz de* $23,\overline{45}$ *como aplicación de las progresiones geométricas.*

$$23,\overline{45} = 23 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$$

O lo que es lo mismo:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100 \cdot 100} + \frac{45}{100 \cdot 100 \cdot 100} + \ldots$$

donde los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuya suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Por tanto:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Depositamos en un banco 1500 € al 3,5 % de capitalización compuesta durante tres años. ¿Cuánto dinero tendríamos al finalizar el tercer año?*

Utilizamos la expresión: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ donde C_0= 1500 €, r = 0,035 pues es el tanto por uno y t = 3 años. Por tanto: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t = 1500(1 + 0,035)^3 = 1663,08$ €

Actividades propuestas

35. Calcula la fracción generatriz del número $4,5\overset{\frown}{6}\overset{\frown}{1}$.

36. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones.

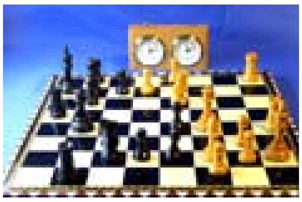
a) Mantener ese capital durante 5 años al 3,5 % anual o

b) Recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes. ¿Qué opción le interesa más?

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

A) El inventor del ajedrez



Ya vimos en el capítulo sobre potencias la leyenda sobre el ajedrez. Ahora puedes utilizar tus conocimientos sobre progresiones para hacer los cálculos:

Cuenta la leyenda como el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: "Pídeme lo que quieras, que te lo daré".

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:

"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".

La sorpresa fue cuando el secretario del príncipe calculó la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor, porque toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía el inventor.

¿Qué tipo de progresión se utiliza? ¿Aritmética o geométrica? ¿Cuál es la razón?

¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

¿Podrías hallar el total de granos de trigo utilizando fórmulas y usando la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potencias de 2 en el tenis

Las potencias de 2 también aparecen en los torneos de tenis. En muchos torneos se enfrentan los jugadores de la siguiente forma: En la final juegan dos jugadores; en la semifinal hay cuatro; en los cuartos de final hay ocho jugadores. Así, en cada ronda adicional la cantidad de jugadores se duplica, tal como ocurría con los granos de trigo en el tablero de ajedrez. Si el torneo tuviera 25 rondas, ¿te imaginas cuántos habría? Pues,¡¡ podrían participar casi todos los habitantes de España!! y con 33 rondas ¡¡ podrían participar todos los habitantes del planeta!!

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Sucesión de *Fibonacci*

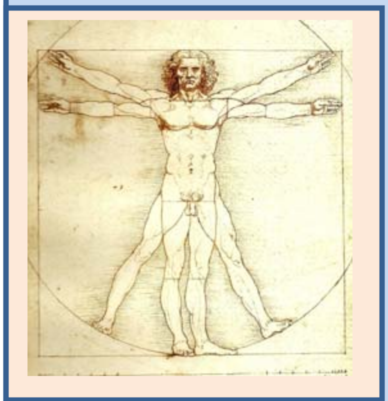
Para los que pensáis que es imposible ver Matemáticas fuera del aula y mucho menos en la naturaleza, os presentamos uno de los más bellos conceptos matemáticos estrechamente relacionado con la naturaleza y el arte.

Se trata de una sucesión muy simple, en la que cada término es la suma de los dos anteriores.

- La sucesión comienza por el número 1,
- Y sigue con 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584…, ya que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Una de las propiedades más curiosas, es que el cociente de dos números consecutivos de la serie se aproxima a la llamada **"sección áurea" o "divina proporción".**

Este número, descubierto por los renacentistas, es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61803…, y se lo nombra con la letra griega ϕ. La sucesión formada por los cocientes de números consecutivos de la sucesión de *Fibonacci* se acerca rápidamente, hacia el número áureo. Los griegos y renacentistas estaban fascinados con este número y lo consideraban el ideal de la belleza.



De hecho, *Leonardo da Vinci* en su obra "*El hombre de Vitrubio*" utiliza este número para conseguir las perfectas proporciones de su obra.

¿Cómo puede ser que el cociente de dos números de una secuencia inventada por el hombre se relacione con la belleza? Pues porque la sucesión de Fibonacci está estrechamente relacionada con la naturaleza. Se cree que Leonardo encontró estos números cuando estudiaba el crecimiento de las poblaciones de conejos. Supongamos que una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, y a partir de ese momento cada vez engendra otra pareja de conejos, que a su vez engendrarán cada mes una pareja de conejos.

¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?

Pues sí, cada mes habrá un número de conejos que coincide con cada uno de los términos de la sucesión de *Fibonacci*. Parece magia, ¿verdad?

Pues muchas plantas, como las piñas o las margaritas siguen una disposición relacionada también con la sucesión de *Fibonacci*, lo que ilustra la famosa frase de Galileo

"La naturaleza está escrita en lenguaje matemático".

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Concepto	*Definición*	*Ejemplos*
Progresión aritmética	Es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama diferencia de la progresión y se suele denotar con la letra *d*.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Término general	$a_n = a_k + (n - k)$ siendo a_k el término que ocupa el lugar *k*	$a_n = 2 + 3n$
Suma de los *n* primeros términos	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = (8/2)\cdot(2 + (2 + 3\cdot 8)) =$ $4 \cdot (4 + 24) = 4 \cdot 28 = 112$
Progresión geométrica	Es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina razón de la progresión y se suele denotar con la letra *r*. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ siendo *i* un número natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Término general	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ siendo a_k el término de la sucesión que ocupa el lugar *k*	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	- Para $r \neq 1$, y un número finito de términos: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ - Para $r \neq 1$, y una cantidad ilimitada de términos: $S = \frac{a_1}{1 - r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) =$ $3(256 - 1) = 3(255) = 765$. $S = 1/(1 - 1/2) = 2$
Producto de los *n* primeros términos	$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = +\sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 4 y la diferencia es 5.
2. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término.
3. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 4, la diferencia 7 y el término *n*-ésimo 88, halla *n*.
4. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.
5. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia 1/2. Halla el término 20.
6. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 3.
7. Halla tres números que estén en progresión aritmética y tales que, aumentados en 5, 4 y 7 unidades respectivamente, sean proporcionales a 5, 6 y 9.
8. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.
9. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 80 y la diferencia es 3. Halla dichos términos.
10. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14,... para obtener como resultado 1064?
11. La suma de *n* números naturales consecutivos tomados a partir de 11 es 1715. ¿Cuántos términos hemos sumado?
12. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.
13. La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1287. Halla estos números.
14. Tres números en progresión aritmética tienen por producto 16640; el más pequeño vale 20. Halla los otros dos.
15. El producto de cinco números en progresión aritmética es 12320 y su suma 40. Halla estos números sabiendo que son enteros.
16. Calcula tres números sabiendo que están en progresión aritmética, que su suma es 18 y que la suma del primero y del segundo es igual al tercero disminuido en dos unidades.
17. La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de los extremos es 30. Halla los términos de la progresión.
18. Halla cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es 22, y la suma de sus cuadrados, 166.
19. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.
20. Halla los seis primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los tres primeros suman –3 y los tres últimos 24.
21. En una progresión aritmética el onceavo término excede en 2 unidades al octavo, y el primero y el noveno suman 6. Calcula la diferencia y los términos mencionados.
22. En una progresión aritmética, los términos segundo y tercero suman 19, y los términos quinto y séptimo suman 40. Hállalos.
23. Sabiendo que las medidas de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y que uno de ellos mide 100º, calcula los otros dos.
24. Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m y que el volumen del ortoedro es de 15470 m^3.
25. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60º. Calcula el valor de cada ángulo.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

26. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 36 metros. ¿Cuánto mide cada lado?

27. Un coronel manda 5050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

28. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 800 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 50 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 12 años?

29. Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.

30. Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?

31. En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm, y la sexta, 134 dm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 230 dm?

32. Calcula el término onceavo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

33. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

34. En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

35. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.

36. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.

37. Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.

38. El volumen de un ortoedro es de 3375 cm^3. Halla la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que la arista intermedia mide 10 cm más que la menor.

39. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...

40. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...

41. La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 16 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.

42. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...

43. Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26 y su producto 216.

44. Calcula el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2.

45. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale un millón. Calcula dichos números.

46. Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0,5 y los dos últimos 0,125.

47. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

48. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla los términos primero y séptimo.

49. Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.

50. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.

51. Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.

52. Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.

53. Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que sus aristas suman 420 m y su volumen 8000 m^3.

54. Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.

55. La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.

56. Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.

57. En una progresión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término sexto.

58. Una progresión geométrica tiene cinco términos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.

59. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

60. A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

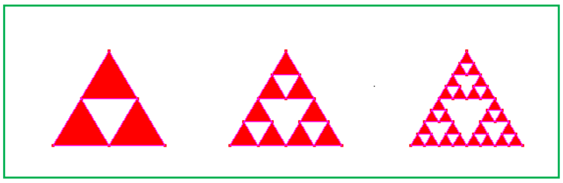
61. Halla la fracción generatriz del número decimal 0,737373..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

62. Se tiene una cuba de vino que contiene 1024 litros. El 1 de octubre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 10 de octubre?

63. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

64. Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.

65. *Triángulo de Sierspinky*: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de Sierspinky, y es un fractal. Imagina que el primer triángulo tiene un área A. Cuando aplicamos la primera iteración, el área es (3/4)A. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L. Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n\ 5\cdot 3^{n-1}$?

a) 5 b) 3 c) 2 d) No es una progresión geométrica

2. En la sucesión de múltiplos de 13, el 169 ocupa el lugar:

a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 7, 13, 19, 31,… es:

a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

4. La sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:

a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5

c) Es una progresión geométrica de razón 3 d) Es una progresión aritmética de diferencia 3.

5. Sea la sucesión: 2, 10, 50, 250, 1250... su término general es:

a) $a_n = 2\cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2\cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5\cdot 5^{n-1}$ *d)* $a_n = 5\cdot 2^{n-1}$

6. ¿Cuánto suman las potencias de 2 comprendidas entre 2^1 y 2^{10}?

a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048

7. La progresión aritmética cuyo primer término es 1 y su diferencia 2, tiene como término general:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$

8. ¿Cuál es el valor de la suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?

a) 500.000 b) 250.000 c) 50000 d) 25000

9. María está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió tres páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 7 días?

a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

10. A Roberto le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?

a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €