

CAPÍTULO 2: NÚMEROS

1. NÚMEROS

Recuerda que:

El conjunto de los números naturales se representa por la letra \mathbb{N} y está formado por los números 1, 2, 3, 4,...

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Es un conjunto infinito, pues no tiene un último elemento, aunque sí tiene un primer elemento, el 1. Es un conjunto bien ordenado pues dados dos números naturales siempre sabemos si uno es menor que el otro.

1.1. El sistema de numeración

El sistema de numeración decimal

En el sistema de numeración decimal el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Otros sistemas de numeración decimal usados actualmente son los que se usan en países árabes como:

Europeo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arábigo-Índico	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Arábigo-Índico Oriental (Persa y Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

Actividades resueltas

- ✚ En el número 9835067 tenemos:
- La cifra de las unidades: el 7 = $7 \cdot 10^0$
 - Luego la cifra de las decenas: el 6, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será: $6 \cdot 10 = 60$
 - En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100 (o por 10^2): $0 \cdot 10^2 = 0$
 - En cuarto lugar las unidades de millar: 2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 (o por 10^3) la cifra situada en ese lugar: $2 \cdot 10^3 = 2000$
 - Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será: $5 \cdot 10^4 = 50000$
 - En sexto lugar, las centenas de millar: 8, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 10^5 : $8 \cdot 10^5 = 800000$
 - Y, por último, las unidades de millón: 9, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 10^6 : $9 \cdot 10^6 = 9000000$

Con esto observamos que el número 9835067 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$9835067 = 9 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Actividades propuestas

- Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:
a) 8216 b) 591274 c) 918273 d) 90003040506
- ¿Qué lugar ocupa la cifra 7 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?
a) 708544 b) 67339001 c) 5092175 d) 9847
- Razona por qué, en el número natural 77777 con cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

$$I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.$$

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Números romanos

Ejemplo:

- ✚ El número MDL equivale en el sistema decimal al 1550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1555, pero las cifras M, D, y L siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Actividades propuestas

- Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números romanos en nuestra numeración:
a) MDCVX b) MMMCCXXXIII c) MMCDXXVI d) MMCCCXLIII

1	一
2	二
3	三
4	四
5	五
6	六
7	七
8	八
9	九
10	十
0	零 / 〇

Números chinos

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo.

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas, el 0 y el 1

0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010	10011	10100	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Cifras del sistema binario

Actividades propuestas

5. Escribe los números del 1 al 10 en el sistema binario.

1.2. Los números triangulares, cuadrados, pentagonales...

Los griegos, y en particular los pitagóricos solían representar los números mediante piedrecitas, cálculos, sobre la arena y los ordenaban formando dibujos geométricos poligonales.

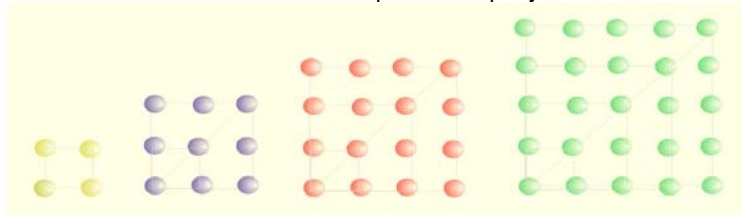
Si los ordenas formando triángulos obtienes los números triangulares:



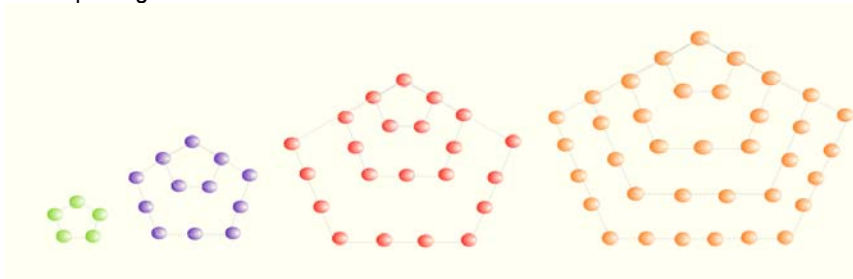
Observa que los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15....

✚ Añade 3 números triangulares más.

Si los ordenamos formando cuadrados obtienes los cuadrados perfectos que ya conoces: 1, 4, 9, 16, 25...



Se pueden ordenar formando pentágonos:



Los números pentagonales son: 1, 5, 12, 22, 35...

Y así con otros polígonos.

Estos números se usaron en la *Escuela Pitagórica* asociando al número una imagen geométrica.

Actividades propuestas

6. Llamamos C_n al número cuadrado y T_n al número triangular que ocupan el lugar n . Ya sabes que C_n es igual a n^2 : $C_n = n^2$

Comprueba que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ es una expresión para los números triangulares.

7. Observa los números cuadrados perfectos. Mira en la figura y comprueba que puedes formarlos como suma de dos números triangulares: $4 = 3 + 1$, $9 = 6 + 3$... Exprésalo de forma general.

8. Escribe tres números triangulares, tres cuadrados y tres pentagonales más de los ya indicados.




9. Dibuja tres números hexagonales.

1.3. Números enteros

Existen ocasiones de la vida cotidiana en que es preciso usar números distintos de los naturales, números positivos y negativos. Los números naturales no resultar ser suficientes.

Recuerda que:

Los números enteros son una ampliación de los números naturales:


-  Los números enteros positivos son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5...
-  Los enteros negativos van precedidos del signo -: -1, -2, -3....
-  El cero es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por **Z**.






$$\mathbf{Z} =$$

Al escribir un número entero positivo no se suele escribir su signo: $+2 = 2$; $+6 = 6$.

Ejemplo:

-  Juan está trabajando y el primer mes gana 1000 euros pero gasta 500 euros, por tanto Juan tiene *en total* $1000 - 500 = 500$ €. Sin embargo, si el primer mes gana 1000 pero sus gastos son mayores (alquiler del piso, impuestos...) y ascienden a 2000 euros, se dice que *perdió en total* $2000 - 1000 = 1000$ euros. Unas veces existe una *ganancia* neta, y otras una *pérdida*, dependiendo de si las ganancias fueron mayores que los gastos o viceversa. Estas dos posibilidades se pueden expresar utilizando el signo de los números negativos (o positivos): en el primer caso ganó en total $1000 - 500 = +500$ euros, y en el segundo ganó en total $1000 - 2000 = -1000$ Euros. Así, se entiende que una *pérdida* es una *ganancia negativa*.

Los números negativos aparecen al considerar:

-  El capital de una empresa que ha quebrado.
-  Temperaturas por debajo de cero grados.
-  Fechas antes de Cristo.
-  Profundidad de un submarino bajo el nivel del mar.
-  Se dice "*las seis menos cinco*" o las "*ocho menos veinte*".




Valor absoluto de un número

La distancia que separa un número del cero se define como valor absoluto del número.

- Es siempre un número positivo (o cero).
- Se escribe entre dos barras $| |$.

$$\begin{array}{l} | +6 | = 6 \\ | -3 | = 3 \end{array}$$

Ejemplo:

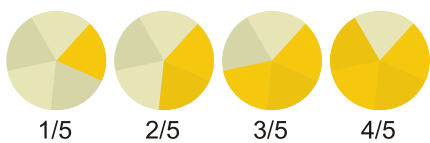
-  El valor absoluto de +4, es 4, y se escribe: $|+4| = 4$;
-  El valor absoluto de -9,3 es 9,3 y por tanto $|-9,3| = 9,3$, del mismo modo:
-  $|+23,5| = 23,5$ y $|-5/6| = 5/6$.

Actividades propuestas

10. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:
 - a) Un submarino navega a 345 m de profundidad
 - b) Hoy el termómetro marcaba 15°C
 - c) El coche estaba en el sótano 5.
 - d) Arquímedes murió en el año 212 antes de Cristo
11. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:
 - a) Me he quedado sin dinero.
 - b) Miguel nació en el año dos mil.
 - c) El garaje está en el tercer sótano.
12. Indica el significado de los números -4, 0 y +7 en cada una de las situaciones siguientes:
 - a) En un garaje
 - b) En una temperatura
 - c) En una cuenta
13. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:
 - a) $|+43|$
 - b) $|-7,2|$
 - c) $|0|$
 - d) $|-81,7|$

1.4. Fracciones

Los objetos matemáticos llamados fracciones permiten que las personas se entiendan al hablar de trozos, partes o porciones, tanto si se ha troceado en porciones idénticas como si son de diferentes tamaños.



Una fracción es el cociente de dos números enteros.

✚ *Comencemos con un ejemplo.* Si dividimos un bizcocho en 5 partes iguales, cada porción es una de las cinco partes en las que hemos dividido el bizcocho. Escribiremos $\frac{1}{5}$ para representar cada trozo, es decir, cada una de las

cinco quintas partes del bizcocho. Si colocamos en una bandeja tres de esas porciones, sobre la bandeja habrá tres quintas partes de bizcocho: $\frac{3}{5}$

El bizcocho completo puede representarse de la siguiente forma $\frac{5}{5} = 1$ ya que está formado por cinco quintas partes.

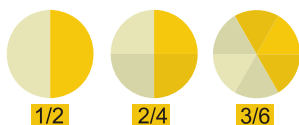
En general, una *fracción* es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto m como n son números naturales. Para referirnos a ella diremos " m partido de n ", m recibe el nombre de *numerador* y n es el *denominador*.

Para valores bajos del denominador, disponemos de denominaciones alternativas:

$\frac{1}{2}$, un medio $\frac{2}{3}$, dos tercios $\frac{3}{4}$, tres cuartos $\frac{4}{5}$, cuatro quintos $\frac{3}{10}$, tres décimos

A partir del valor 11 del denominador: $\frac{7}{11}$, siete onceavos $\frac{11}{23}$, once veintitresavos

Una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿es posible, o tiene sentido, que sea mayor el numerador que el denominador? La respuesta es afirmativa, sí.



Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de *fracciones impropias*. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de *fracciones propias*.

Reducción de una fracción. Fracciones irreducibles

Dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ son equivalentes si $m \cdot q = n \cdot p$

✚ Las fracciones $1/2$ y $2/4$ son equivalentes pues representan la misma proporción. Es lo mismo media tarta que dos cuartos de tarta.

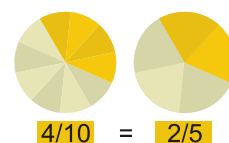
A partir de una fracción m/n , si r es cualquier número natural entonces la fracción $(m \cdot r)/(n \cdot r)$ es equivalente a m/n :

$$\frac{m \cdot r}{n \cdot r} = \frac{m}{n}$$

✚ *Ejemplo:*

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{10}{30}$$

Una fracción equivalente a $1/3$ es, por ejemplo, $10/30$, ya que



$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Anteriormente dijimos que $1/2$ y $2/4$ son fracciones equivalentes. Por la misma razón, otras fracciones equivalentes son $3/5$, $6/10$ y $24/40$ puesto que $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$, $\frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{24}{40}$, $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$.

Una manera alternativa de destacar estas relaciones consiste en decir que las fracciones $3/5$ y $6/10$ son reducciones de la fracción $24/40$, mientras que $3/5$ es una reducción de $6/10$. Podemos intuir que la fracción $3/5$ no puede reducirse más, es una fracción irreducible.

Obtendremos la mayor reducción de una fracción p/q al dividir tanto p como q entre su máximo común divisor.

Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.

✚ *Ejemplo:* Una reducción de $24/40$ es $6/10$, pues la obtenemos al dividir tanto 24 como 40 entre 4. Como el máximo común divisor de 24 y 40 es 8, la mayor reducción de la fracción $24/40$ es $3/5$. Al ser el máximo común divisor de 3 y 5 igual a 1, la fracción $3/5$ es irreducible, tal y como era de esperar.

✚ *Ejemplo:* En ocasiones, una fracción se reduce a un número natural como, por ejemplo, la fracción $30/6$, ya que el máximo común divisor de 30 y 6 es igual a 6, y al dividir 30, el numerador, entre 6 obtenemos 5.

Dos fracciones son equivalentes si se reducen a una misma fracción irreducible.

Un número decimal periódico puro se convierte en aquella fracción que tiene por numerador, la diferencia entre el número formado por la parte entera y el periodo menos la parte entera, y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo.

✚ **Ejemplos:** $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$ $0,\overline{934} = \frac{934}{999}$ $4,\overline{6} = \frac{46-4}{9} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$

Si es periódico mixto, veamos la forma de proceder con un ejemplo:

$$\begin{aligned} X &= 7,6\overline{31} \\ 10 \cdot X &= 10 \cdot 7,6\overline{31} = 76,31313131 \dots \\ 1000 \cdot X &= 1000 \cdot 7,6\overline{31} = 7631,313131 \dots \\ (1000 - 10) \cdot X &= 7631 - 76 \Rightarrow X = \frac{7631 - 76}{990} = \frac{6555}{990} \end{aligned}$$

Una expresión decimal periódica mixta se convierte en aquella fracción que tiene por numerador a la diferencia entre, el número natural formado por la parte entera, el anteperiodo y el periodo, menos el número natural formado por la parte entera y el anteperiodo, y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo seguido de una cantidad de ceros coincidente con el número de cifras del anteperiodo.

✚ **Ejemplo:** $0,3\overline{49} = \frac{349-3}{990} = \frac{346}{990}$ $8,07\overline{458} = \frac{807458-807}{99900} = \frac{806651}{99900}$

Observa que:

Si calculamos la suma $0,\overline{3} + 0,\overline{6}$. Parece natural que

$$0,\overline{3} + 0,\overline{6} = 0,333333 \dots + 0,666666 \dots = 0,999999 \dots = 0,\overline{9}$$

Por otro lado $0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ y $0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Así que sumando $0,\overline{3} + 0,\overline{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ de modo que

$$1 = 0,\overline{9} = 0,999999 \dots$$

1.6. Aproximaciones, truncamientos y redondeos

- ✚ Si vamos a pagar con un billete de 50 euros una compra que asciende a 32'69 euros, esperamos una vuelta de 17'31 euros. Si en la caja no hay monedas de un céntimo, nos propondrán que demos por buena una vuelta de 17'30 euros. Es una *aproximación a la baja*.
- ✚ Si realizamos una compra por un importe de 12'44 euros y la saldamos con 12'45 euros estamos ante una *aproximación al alza*.

Una manera de realizar una aproximación a la baja de un número decimal es el *truncamiento*. Consiste en decidir cuántas cifras decimales queremos considerar y, simplemente, eliminar las restantes a partir de la última cifra decimal mostrada.

Otra forma de realizar una aproximación es a través de un *redondeo*. Éste consiste en decidir cuántas cifras decimales va a tener la aproximación, realizar el truncamiento oportuno y, en función de cuál sea la primera cifra decimal no considerada, mantener o incrementar en una unidad la parte decimal del truncamiento. El criterio para efectuar, o no, dicho incremento es el siguiente:

- ✚ Cuando la primera cifra decimal eliminada es 0, 1, 2, 3 o 4, el redondeo coincide con el truncamiento.
- ✚ Si la primera cifra decimal no considerada es un 5, 6, 7, 8 o 9, el redondeo se obtiene al aumentar en una unidad la parte decimal del truncamiento.

Ejemplo:

- ✚ Redondeamos y truncamos la expresión decimal 45,98351.

	Redondeo	Truncamiento
Décimas	46,0	45,9
Centésimas	45,98	45,98
Milésimas	45,984	45,983
Diezmilésimas	45,9835	45,9835

Actividades propuestas

24. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:
- a) $11,1234$ b) $6,\overline{6}$ c) $9,3\overline{50}$ d) $8,\overline{71}$ e) $8,334\overline{8}$ f) $2,64\overline{08}$
25. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:
- a) $11,1234$ b) $6,\overline{6}$ c) $9,3\overline{50}$ d) $8,\overline{71}$ e) $8,334\overline{8}$ f) $2,64\overline{08}$ g) $3,99\overline{96}$

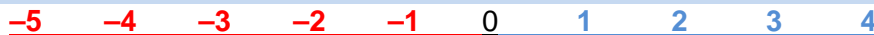
2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

2.1. Representación en la recta numérica

Recuerda que:

Para representar números enteros en la recta numérica:

1. Debemos trazar una recta horizontal y marcamos el cero, que se llama origen
2. Dividimos la recta en segmentos iguales, de longitud 1
3. Colocamos los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

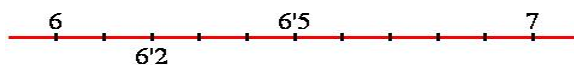


Ejemplo:

- ✚ Representa en una recta numérica: $-2, 0, 4, -1, 8, -7, -3$ y 1



- ✚ Para representar un número decimal como $6,2$ en primer lugar nos fijamos en su parte entera, 6, lo que nos informa de que $6,2$ se encuentra entre los números naturales 6 y 7. Como su parte decimal posee una sola cifra, son 2 décimas, deberemos dividir el segmento de extremos 6 y 7 en diez partes iguales para, finalmente, situar $6,2$ sobre la segunda de las marcas.



Actividades propuestas

26. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números: $-8, 5, 1, -5, 8, -3, -7$ y 0 .
27. Sitúa en la siguiente recta los números $8,43, 8,48, 8,51$ y $8,38$



2.2. Comparación de números

Al representar los números en la recta numérica quedan ordenados.

Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado es menor.

- ✚ **Ejemplo:** -7 está más a la izquierda que $+4$ por tanto -7 es menor que $+4$. Se escribe $-7 < +4$

El signo $<$ se lee "menor que" y el signo $>$ se lee "mayor que".

Decidir si un número decimal es mayor o menor que otro es bastante sencillo. Si sus partes enteras son distintas, ellas ya determinan cuál es mayor.

- ✚ **Ejemplo:** $13,66$ es mayor que $11,4$, pues el primero tiene parte entera 13 y el segundo 11.

Si tienen igual parte entera pasamos a mirar su primera cifra decimal, la de las decenas. Si son diferentes, ya podemos decidir.

- ✚ **Ejemplo:** $7,25$ es menor que $7,3$, ya que tienen la misma parte entera y la primera cifra decimal de $7,3$ es mayor que la primera cifra decimal de $7,25$.

En general, si coinciden las partes enteras buscamos la primera cifra decimal en la que los números difieren. La que sea mayor pertenecerá al mayor número decimal.

- ✚ **Ejemplo:** Podemos ordenar números utilizando los signos anteriores:

$$-7,8 < -3,5 < -2,9 < -1,3 < 0 < 2,7 < 4,4 < 8,2.$$

O bien: $8,2 > 4,4 > 2,7 > 0 > -1,3 > -2,9 > -3,5 > -7,8.$

- ✚ Parece raro que el 0 sea mayor que otro número, pero piensa que se tiene más si no se tiene nada, que si se debe dinero. Si el termómetro marca 0°C no hace mucho calor, pero menos calor hace si marca -10°C . Es decir: $0 > -10$

Actividades propuestas

28. Representa en una recta numérica los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: $-8, 5, 1, -5, 8, -3, -7$ y 0 .
29. Completa en tu cuaderno con el signo $<$ (menor) o $>$ (mayor) según corresponda:
 - a) $-13,6$ $-67,1$
 - b) $-80,2$ $+94,5$
 - c) $+37$ $+48$
 - d) $+52$ -64
 - e) -21 $|-25|$
30. Ordena de menor a mayor
 - a) $+5,1, -4,9, -1,5, +18,2, 5,17$
 - b) $+6,9, -7,2, -8,5, -5,9, -7,21$
31. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:
 - a) $-0,872$ y $-0,8721$
 - b) $3,58$ y $|-3,57|$
 - c) $7,0001$ y $7,00001$
 - d) $-4,78$ y $-8,92$
32. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que $6,147$ y menores que $6,2$.

3. OPERACIONES

3.1. Suma y resta. Propiedades

Suma de números enteros

Recuerda que:

Para sumar dos números enteros de igual signo se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos

Para sumar dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto

Ejemplo:

- Tienes 75 € y te dan 50 € entonces tienes 125 €: $+75 + 50 = +125$.
- Debes 75 € y gastas 50 € entonces acumulas una deuda de 125 €: $-75 - 50 = -125$.
- Tienes 75 € pero debes 50 € entonces tienes 25 €: $-50 + 75 = +25$.
- Debes 75 € y tienes 50 € entonces debes 25 €: $-75 + 50 = -25$.

Suma de fracciones

Recuerda que:

Para realizar la suma de dos fracciones debemos conseguir que tengan el mismo denominador buscando fracciones equivalentes. Así, para sumar $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ deberemos buscar y encontrar dos números naturales r y s que nos transformen cada

una de las anteriores fracciones en otras equivalentes, $(m \cdot r)/(n \cdot r)$ y $(p \cdot s)/(q \cdot s)$, de forma que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, es decir, que $n \cdot r = q \cdot s$, en cuyo caso: $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} + \frac{p \cdot s}{q \cdot s} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} + \frac{p \cdot s}{n \cdot r} = \frac{m \cdot r + p \cdot s}{n \cdot r}$

Como hay muchas parejas de números naturales r y s que hacen posible esa igualdad, buscaremos los más pequeños. Puesto que $n \cdot r$ es múltiplo de n y $q \cdot s$ es múltiplo de q , alcanzaremos r y s a partir del mínimo común múltiplo de n y q .

$$n \cdot r = q \cdot s = m.c.m.(n, q)$$

El valor de r resulta de dividir ese m.c.m.(n, q) entre n y el de s se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo entre q .

✚ **Ejemplo:** $\frac{7}{4} + \frac{5}{6}$ Los denominadores son diferentes, 4 y 6. Su mínimo común múltiplo es 12. Al

dividir 12 entre 4 nos da 3 y al hacerlo entre 6 obtenemos 2. $\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{21}{12}$ $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$

Finalmente $\frac{7}{4} + \frac{5}{6} = \frac{21}{12} + \frac{10}{12} = \frac{31}{12}$

Suma de expresiones decimales

Suma de expresiones decimales. Ahora basta con que las partes decimales tengan el mismo número de cifras. Si no lo tienen desde un principio, añadimos los ceros que sean necesarios para ello.

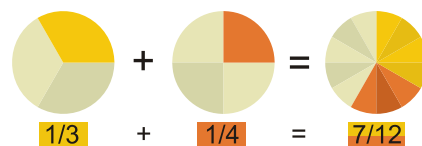
Ejemplos:

$$67'7 + 71'15 = 67'70 + 71'15 = 138'85$$

$$44'39 + 23 = 44'39 + 23'00 = 67'39$$

✚ Si una persona tiene 8 euros y 42 céntimos de euro y otra tiene 7 euros y 94 céntimos ¿cuánto dinero tienen entre las dos?

Tenemos que sumar. En total tienen $8 + 7 = 15$ euros y $42 + 94 = 136$ céntimos. Pero, como 100 céntimos de euro es lo mismo que 1 euro, 136 céntimos de euro es igual a 1 euro más 36 céntimos. De esta forma, esas dos personas tienen $15 + 1 = 16$ euros y 36 céntimos.



Propiedades de la suma

Commutativa. No importa en qué orden sumemos dos números:

$$a + b = b + a$$

✚ Ejemplo:

$$714'66 + 2'47 = 717'13$$

$$2'47 + 714'66 = 717'13$$

Asociativa. Nos permite sumar más de dos números agrupándolos como queramos, de dos en dos.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

✚ Ejemplo:

$$95'7 + 30'02 + 17'4 = (95'7 + 30'02) + 17'4 = 125'72 + 17'4 = 143'12$$

$$95'7 + 30'02 + 17'4 = 95'7 + (30'02 + 17'4) = 95'7 + 47'42 = 143'12$$

Elemento neutro. El número 0 sumado a cualquier otro número no lo altera.

✚ Ejemplo:

$$0 + 78'324 = 78'324 = 78'324 + 0$$

Opuesto de un número: El opuesto de un número es otro número de igual valor absoluto y distinto signo que verifica que

$$a + \text{Op}(+a) = 0.$$

Se escribe: $\text{Op}(+a) = -a$, $\text{Op}(-a) = +a$ o bien: $-(+a) = -a$, $-(-a) = +a$

✚ Ejemplo:

$$\text{Op}(+5) = -5 \quad \text{Op}(-7,3) = +7,3 \quad -(+5) = -5 \quad -(-7,3) = +7,3.$$

Resta

Para restar dos números se suma al primero el opuesto del segundo.

El signo menos delante de un paréntesis cambia los signos de los números que hay dentro del paréntesis.

Actividades propuestas

33. Halla el resultado de las siguientes sumas:

a) $(+12,8) + (+57) + (-4,6)$

b) $(-83,2) - (-24,1) + (-10,5)$

c) $(-35) + (-48) + (+92)$

34. Efectúa estas operaciones

a) $(+3,8) + (+4,2) - (-52)$

b) $(-614) + (-77) + (-811)$

c) $(-97) - (-12) + (+26)$

d) $(-45) + (+52)$

35. Un autobús comienza el viaje con 30 pasajeros. En la primera parada se bajan 16 y se suben 21. En la segunda se bajan 17 y se suben 24, y en la tercera se bajan 9. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?

36. Un avión vuela a 3672 m y un submarino está sumergido a 213 m, ¿qué distancia en metros les separa?

37. Arquímedes nació en el año 287 a.C. y murió el año 212 a. C. ¿Cuántos años tenía?

38. Expresa al número 100 de cuatro formas distintas como suma y resta de 3 números enteros.

39. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.

40. Realiza las siguientes sumas de fracciones: a) $\frac{1}{5} + \frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{6} + \frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8} + \frac{5}{2}$ d) $\frac{67}{100} + \frac{13}{24}$

41. Calcula: a) $\frac{5}{14} - \frac{7}{6}$ b) $\frac{11}{6} - \frac{13}{5}$ c) $\frac{13}{100} - \frac{13}{240}$ d) $\frac{50}{21} - \frac{7}{3}$

3.2. Producto y cociente. Propiedades

Producto de números enteros

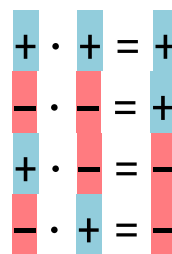
Recuerda que:

Para multiplicar dos números enteros se debe:

1º) Multiplicar sus valores absolutos

2º) Aplicar la regla de los signos siguiendo lo siguiente:

Es decir, se asigna el signo + si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo - si tienen distinto signo.



Ejemplos:

$(+7) \cdot (+3) = +21$

$(-1) \cdot (-1) = +1$

$(+8) \cdot (-4) = -32$

$(-2) \cdot (+9) = -18$

✚ Luis gana 1000 euros al mes, si no gasta nada, ¿cuánto ahorrará al cabo de 7 meses?

$(+1000) \cdot (+7) = +7000$ € ahorrará al cabo de 7 meses.

✚ El recibo mensual es de 65 euros al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 4 meses?

$(-65) \cdot (+4) = -260$ € gastará al cabo de 4 meses.

✚ Álvaro gasta 12 euros al mes en golosinas. Deja de comprarlas durante 5 meses. ¿Cuánto ha ahorrado? $(-12) \cdot (-5) = +60$ € ahorrará al cabo de 5 meses.

Producto de fracciones

Para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores entre sí y lo mismo hacemos con los denominadores:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{20}{56}$$

Podemos simplificar, reducir, el resultado: $\frac{20}{56} = \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 14} = \frac{5}{14}$

Producto de expresiones decimales

Para realizar el producto de dos expresiones decimales se debe:

✚ Multiplicar, en primer lugar, los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.

✚ Al resultado de ese producto le ponemos una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Ejemplos:

$57 \cdot 33 = 1881$
 ✚ $5,7 \cdot 3,3 = 18,81$ $93,05 \cdot 72,4 = 6736,820 = 6736,82$ $44,16 \cdot 8 = 353,28$

Propiedades de la multiplicación.

Commutativa. No importa en qué orden multipliquemos dos números.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplos: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$ $3 \cdot (-5) = (-5) \cdot 3 = -15$ $1,552 \cdot 5,9 = 5,9 \cdot 1,552 = 9,1568$ $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{5} = \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{77}{45}$

Asociativa. Nos permite multiplicar más de dos números agrupándolos como queramos de dos en dos:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplos: $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$ $(2 \cdot 3) \cdot (-5) = 2 \cdot (3 \cdot (-5)) = -30$
 $5,7 \cdot 3,2 \cdot 7,14 = (5,7 \cdot 3,2) \cdot 7,14 = 5,7 \cdot (3,2 \cdot 7,14) = 130,2336$ $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{11}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{77}{90}$

Elemento neutro. El número 1 multiplicado por cualquier otro número, no lo altera. $1 \cdot a = a = a \cdot 1$

Ejemplo: $2 \cdot 1 = 2$ $1 \cdot (-5) = (-5)$ $7,3512 \cdot 1 = 7,3512$ $1 \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$

Observa que:

En ocasiones existe un número que multiplicado por otro nos da la unidad. Cuando ese número existe, se llama inverso. Dentro del conjunto de los números naturales y de los números enteros, no existe el elemento inverso. Pero con las fracciones, sí.

Ejemplo: $\frac{5}{11} \cdot \frac{11}{5} = \frac{55}{55} = 1$ $\frac{1}{11} \cdot \frac{11}{1} = \frac{11}{11} = 1$ $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Cuando en una multiplicación uno de los factores es la suma de dos números, como, por ejemplo, $8,3 \cdot (6,5 + 1,04)$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$6,5 + 1,04 = 6,50 + 1,04 = 7,54 \quad 8,3 \cdot 7,54 = 62,582$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$8,3 \cdot (6,5 + 1,04) = (8,3 \cdot 6,5) + (8,3 \cdot 1,04) = 53,95 + 8,632 = 62,582.$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

En general, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma con fracciones nos dice:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q}\right)$$

Conviene comentar que esta propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente denominamos sacar factor común:

$$\frac{12}{5} + \frac{22}{15} = \frac{2 \cdot 6}{5} + \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 3} = \left(\frac{2}{5} \cdot 6\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \left(6 + \frac{11}{3}\right)$$

Ejemplos:

a) $6350 \cdot 4 - 6350 \cdot 3 = 6350 \cdot (4 - 3) = 6350 \cdot 1 = 6350$

b) $635 \cdot 2 + 3 \cdot 35 = (2 + 3) \cdot 635 = 5 \cdot 635 = 3175$

c) $928 \cdot 6 - 928 \cdot 5 = 928 \cdot (6 - 5) = 928 \cdot 1 = 928$

d) $928 \cdot 7 + 928 \cdot 3 = 928 \cdot (7 + 3) = 928 \cdot 10 = 9280$

e) $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{58}{15}$

Actividades propuestas

42. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) $(+35) \cdot (+2)$

b) $(+4) \cdot (-72)$

c) $(-8) \cdot (-45)$

d) $(-5) \cdot (+67)$

e) $(+28) : (+2)$

f) $(+27) : (-3)$

g) $(-36) : (-2)$

h) $(-54) : (+9)$

43. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) $(+721) \cdot (+3)$

b) $(+562) \cdot (-3)$

c) $(-915) \cdot (-2)$

d) $(-6) \cdot (+72)$

e) $(+303) : (+3)$

f) $(+505) : (-5)$

g) $(-160) : (-4)$

h) $(-704) : (+2)$

44. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:

a) $(+2) \cdot (+40)$

b) $(+30) \cdot (-2)$

c) $(-60) \cdot (-3)$

d) $(-50) \cdot (+8)$

e) $(+80) : (+4)$

f) $(+18) : (-3)$

g) $(-15) : (-5)$

h) $(-70) : (+7)$

45. Calcula: a) $\frac{8}{22} \cdot \frac{3}{75}$ b) $6 \cdot \frac{7}{11}$ c) $23 \cdot \frac{1}{23}$ d) $\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{3}$

46. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{6}{8}$ b) $\frac{9}{15} \cdot \frac{5}{3}$ c) $\frac{14}{25} \cdot \frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{15} \cdot \frac{10}{12}$

47. Calcula: a) $7,3 \cdot 2,54$ b) $2,89 \cdot 7,21$ c) $3,54 \cdot 5,2 \cdot 6,8$ d) $6,9 \cdot 7,5 \cdot 6,1$

48. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) $756 \cdot 4 - 756 \cdot 3$ b) $350 \cdot 8 + 350 \cdot 2$ c) $927 \cdot 13 - 927 \cdot 3$ d) $700 \cdot 33 - 700 \cdot 3$

49. Efectúa: a) $9 \cdot (4,01 + 3,4)$ b) $7,3 \cdot (12 + 5,14)$ c) $2,9 \cdot (25,8 - 21,97)$

50. Realiza los productos indicados: a) $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}$

51. Efectúa las siguientes operaciones: a) $\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{8}\right)$ b) $\left(\frac{9}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{8}\right)$

División de números naturales

Ejemplo: En el comedor del instituto las mesas son de 4 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 35 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 8 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 4} \\ \underline{3} \\ 8 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se llaman:

35 → Dividendo 4 → Divisor 8 → Cociente 3 → Resto

Además, como ya sabes, se verifica que: $35 = (4 \cdot 8) + 3$

Esta propiedad se verifica siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ \underline{r} \\ C \end{array}$$

Se verifica que:

$$D = (d \cdot c) + r$$

Dividendo es igual a divisor por cociente más el resto

Ejemplo: El cociente entre 3658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.
 $3658 = 65 \cdot 56 + 18$

Ejemplos: $27/3$, $27:3$ y $\frac{27}{3}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 27 entre 3.

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo. Si hacemos:

$325 \div 5 = 65$ la división es exacta.

Pero si hacemos:

$325 \div 15 = 21.666666667$

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: $325 - (15 \cdot 21) = 10$.

Cociente de números enteros

Para dividir dos números enteros se debe:

1º) Calcular el cociente de sus valores absolutos

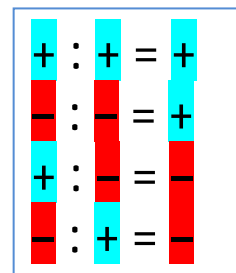
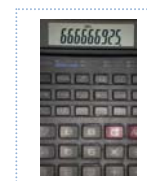
2º) Asignar al resultado un signo mediante la siguiente regla:

Ejemplo: $(+36) : (+6) = +6$ $(-32) : (-4) = +8$
 $(+27) : (-3) = -9$ $(-49) : (+7) = -7$

Actividades propuestas

52. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$

8214 : 26 b) 271093 : 452 c) 1112220000 : 385 d) 274 : 25



3.3. Jerarquía de operaciones

En la expresión: $5 \cdot 4 + 3$, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería: $5 \cdot 4 + 3 = 20 + 3 = 23$

¿Y en $9 : 3 \cdot 2$? Son divisiones y multiplicaciones con igual prioridad. Podemos convenir que primero se realiza la primera operación, la que está más a la izquierda: $9 : 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Prioridad de operaciones:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre paréntesis y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las multiplicaciones y divisiones y luego, las sumas y restas.

En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.

Ejemplo:

Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(17 + 8) \cdot 6 = 25 \cdot 6 = 150 \qquad 17 + 8 \cdot 6 = 17 + 48 = 65$$

Notas

- Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: $(21 \cdot 2) + 30$ resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.
- Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Ejemplo:

Jerarquía de operaciones	
1) Se resuelven los paréntesis	$[(+7 - 5) \cdot (+4 - 8 - 3)] + (-27) : (-3) + 20$
2) Se realizan multiplicaciones y divisiones	$[(+2) \cdot (-7)] + (-27) : (-3) + 20$
3) Se efectúan sumas y restas	$[-14] + (+9) + 20$
	Resultado = 15

Actividades propuestas

53. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+4 - (+5) \cdot (-3)$ b) $+6 + (-9) : (+2-5)$ c) $-3 + [-4 - (-26) : (+2)]$

54. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$ b) $-6 + (-7) : (+7)$ c) $+28 - (-36) : (-9-9)$
 d) $+11 + (+7) \cdot (+6 - 8)$ e) $-7 - [+4 - (-6) : (+6)]$ f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Repaso números naturales

- Realiza las siguientes operaciones: a) $(34 + 52) \cdot 5$ b) $89 \cdot 2 + 12$ c) $55 + 67 \cdot 3 + 13$ d) $280 - 110 \cdot 2 + 90$
- Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:
 a) $8 \cdot (22 - 20)$ b) $8 \cdot 22 - 20$ c) $8 \cdot 22 - 8 \cdot 20$ d) $8 \cdot (22 + 20)$ e) $8 \cdot 22 + 20$
- Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.
- Realiza las siguientes operaciones:
 a) $23 \cdot 6 + (35 - 13) : 11 - 4 \cdot 7$ b) $48 : 4 \cdot 8 : 2 - (3 \cdot 12) : 6$ c) $357 - 23 \cdot 7 + 280 : 14$ d) $20 \cdot 9 - 11 \cdot 7 + 265 : 53$

Números enteros

- Efectúa en tu cuaderno:
 a. $6 - (8 + 10 - 1 - 2)$ b. $7 + (2 - 8 - 1) - (8 - 1 + 6)$
 c. $(10 - 2 - 7) - (1 - 9 - 16)$ d. $-(9 - 6 - 8) - (-7 - 10 + 2)$
- Quita paréntesis y efectúa en tu cuaderno:
 a. $15 + [2 - 8 - (10 - 3)]$ b. $7 - [(5 - 8) - (6 - 12)]$
 c. $(5 - 14) - [2 - (2 - 4 - 3)]$ d. $(1 - 11 + 6) - [(3 - 2) - (4 - 16)]$ e. $[8 - (4 - 16)] - [10 - (5 - 12)]$
- Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:
 a. $(+4) \cdot (+8)$ b. $(-11) \cdot (-5)$ c. $(+12) \cdot (-6)$ d. $(-11) \cdot (-10)$ e. $(+16) : (+4)$
 f. $(-12) : (+6)$ g. $(+24) : (-3)$ h. $(-81) : (-9)$ i. $(-63) : (+7)$ j. $(-30) : (-10)$
- Halla en tu cuaderno:
 a. $(-2)^1$ b. $(-2)^2$ c. $(-2)^3$ d. $(-2)^4$ e. $(-2)^5$
 f. $(-2)^6$ g. $(-2)^7$ h. $(-2)^8$ i. $(-2)^9$ j. $(-2)^{10}$
- Efectúa las operaciones y comprueba como varía el resultado según la posición de los paréntesis:
 a. $18 - 7 \cdot 3$ b. $(18 - 7) \cdot 3$ c. $(-12) - 4 \cdot (-8)$
 d. $[(-12) - 4] \cdot (-8)$ e. $(-5) \cdot (+7) + (-3)$ f. $(-5) \cdot [(+7) + (-3)]$
- Calcula mentalmente:
 a. $(-1)^1$ b. $(-1)^2$ c. $(-1)^3$ d. $(-1)^4$ e. $(-1)^5$ f. $(-1)^6$ g. $(-1)^7$ h. $(-1)^8$ i. $(-1)^9$ j. $(-1)^{10}$
- Calcula en tu cuaderno:
 a) $(-6)^4$ b. $(+5)^5$ c. $(-3)^3$ d. $(+4)^3$ e. $(-9)^2$ f. $(-10)^6$
- Representa gráficamente y ordena en sentido decreciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros:
 -5, 7, -3, 0, -6, 1, 2

13. Antonio hace las cuentas todas las noches y en su cuaderno tiene anotado: Lunes: Papá me ha devuelto 10 euros que me debía: Martes: He vendido sellos de mi colección y me han pagado 5 euros. Miércoles: Me compro unos cromos por 3 euros. Jueves: Me he tomado un helado por 1 euro. Si Antonio tenía 15 euros el lunes por la mañana, ¿cuánto tiene cada noche? ¿Ha aumentado su dinero o ha disminuido? ¿En cuánto?
14. ¿De qué planta ha salido un ascensor que después de subir 7 pisos llega al piso 4?
15. Jaime ha comenzado un negocio, y de momento pierde 100 euros cada día. Comparando con su situación actual, ¿cuál era su situación hace 5 días?
16. Pedro dispone en 2013 de una máquina para viajar en el tiempo. Decide avanzar 240 años, ¿en qué año se encontraría? Y si retrocede 390 años, ¿a qué año viaja?
17. ¿A qué edad se casó una persona que nació en el año 9 antes de Cristo y se casó en el año 19 después de Cristo?
18. ¿En qué año nació una mujer que en el año 27 después de Cristo cumplió 33 años?
19. ¿En qué año se casó un hombre que nació en el año 20 antes de Cristo y se casó a los 27 años?
20. Hace una hora el termómetro marcaba $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ y ahora marca $5\text{ }^{\circ}\text{C}$. La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?
21. Por la mañana un termómetro marcaba 7 grados bajo cero. La temperatura baja $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ a lo largo de la mañana. ¿Qué temperatura marca al mediodía?
22. ¿A qué planta ha llegado un ascensor de un edificio que estaba en el sótano 2 y ha subido 7 pisos?
23. **Un juego**

a) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre 3.

-6		+6
	+2	
		0

b) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre -70 .

		+7
	-7	
-7		+2

24. Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo. El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:
 –Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €.
 El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado. ¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Fracciones

Realiza los siguientes cálculos: a) $\frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$ b) $\frac{4}{3 - \frac{2}{2}} + 1$ c) $\frac{1 - \frac{4}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{9}{9}} - 2$ d) $\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{9}{8}\right)$

25. A una cena asisten 8 personas. De postre hay un pastel que ya ha sido dividido en 8 porciones iguales. Tras repartir el postre llegan de repente 2 personas más. Quienes estaban desde un principio ofrecen a los recién llegados que prueben el pastel y se dan cuenta de que de las 8 porciones hay 6 que no se han tocado y 2 que han sido ingeridas. Indica qué se ha de hacer para que las personas que no han probado la tarta reciban la misma cantidad.
26. María es 70 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?
27. Si una persona vive 80 años, y se pasa durmiendo un tercio de su vida, ¿cuánto ha dormido?
28. Indica cuáles de las siguientes fracciones en propias y cuáles son impropias:

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{16}{7}$ e) $\frac{21}{4}$ f) $\frac{5}{6}$

29. Transforma en número mixto las fracciones impropias de la actividad anterior.
30. En un espectáculo dicen que se han vendido los $\frac{5}{4}$ de las entradas de un teatro que tiene capacidad para 500 espectadores. ¿Cuántas entradas se han vendido? ¿Qué opinas del resultado que se obtiene al hallar los $\frac{5}{4}$ de 500?
31. En un iceberg se mantiene sumergida las nueve décimas partes de su volumen. Si emerge 318 km^3 , ¿cuál es el volumen sumergido? ¿Y el volumen total?
32. En un bosque hay pinos, robles y encinas. Los pinos ocupan los $\frac{3}{7}$ y los robles, $\frac{1}{3}$. ¿Qué espacio ocupan las encinas?
33. Nieves y José tienen igual sueldo mensual, Nieves gasta los $\frac{3}{5}$ de su sueldo y José los $\frac{5}{7}$, ¿quién gasta más?
34. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos: a) $\frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{7}{6} + \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{6}$; b) $\frac{7}{10} - \frac{5}{14} = \frac{\quad}{70} - \frac{\quad}{70} = \frac{\quad}{70}$

35. $\frac{1}{3}$ de los ingresos de una familia se gastan en recibos (agua, teléfono, comunidad de vecinos,,), en comer gastan $\frac{3}{7}$, ¿qué parte les queda para ahorrar y otros gastos?
36. En un país se valora que se gasta 250 litros de agua por persona y día, y de esa cantidad los hogares consumen los $\frac{3}{20}$ del total. Si se desperdician los $\frac{1}{7}$, ¿cuántos litros de agua se desperdicia en un día en una casa de 5 habitantes?
37. Tu profesor/a ha dedicado 5 horas en corregir exámenes y todavía le quedan $\frac{1}{4}$ sin corregir, ¿cuánto tiempo deberá dedicar todavía?
38. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que todas ellas sean equivalentes:

a) $\frac{\quad}{5}$ b) $\frac{34}{\quad}$ c) $\frac{\quad}{2}$

39. Realiza los siguientes cálculos y, en cada caso, reduce la fracción resultante:

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{6}$ c) $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{16} : \frac{3}{10}$

40. Tres naufragos en una isla desierta recogen gran cantidad de cocos y se van a dormir. Por la noche se levanta uno de ellos, que no se fía de los demás, reparte los cocos en tres montones iguales, esconde su parte y vuelve a dormir. Luego, se levanta otro y hace lo mismo con los cocos restantes. Lo mismo hace el tercero. A la mañana siguiente reparten los cocos y también el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había en total si se sabe que eran menos de 100? ¿Cuántos tiene cada naufrago?
41. Un rajá regala a sus hijas unas perlas y dice que las repartan de la siguiente manera: a la primera hija le deja la sexta parte de las perlas, a la segunda, la quinta parte de las que quedan, a la tercera, la cuarta parte, y así sucesivamente. Resulta que a todas las hijas les ha tocado el mismo número de perlas. ¿Cuántas hijas tenía el rajá? ¿Cuántas perlas?

Expresiones decimales

42. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número $1,8\bar{7}$ dé como resultado un número natural.
43. Aproxima por truncamiento a décimas y centésimas los siguientes números decimales:
a) 9,235 b) 57,0001 c) $8,\bar{7}$ d) $3,52\bar{87}$ e) $5'99\bar{96}$
44. Redondea los siguientes números decimales hasta las décimas y hasta las centésimas:
a) 8,9351 b) $5,19\bar{90}$ c) $83,\bar{74}$ d) 77,992 e) $56,\bar{01}$
45. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.
46. Vicente compró en la papelería 15 bolígrafos y 8 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0'72 euros y cada lapicero 0'57 euros, ¿cuánto se gastó Vicente?
47. Pilar se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 1,53 euros. También compró un cuaderno que costaba cuatro veces más que cada bolígrafo. Calcula el precio del cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de $20 \cdot (15 + 3)$? a) 303 b) 360 c) 330 d) 90
2. El resultado de la operación: $\{(-5 + 8) \cdot (-3 - 5) + (-7 + 1) : (+9 - 3)\}$ es:
a) $-25/6$ b) +24 c) -25 d) -5
3. Un termómetro ha subido 4 °C, luego ha bajado 6 °C, después ha bajado 8 °C y, por último, marca menos 9 °C. La temperatura inicial era:
a) -1 °C b) -19 °C c) +1 °C d) -14 °C
4. Al viajar desde una latitud de 9° Norte hasta otra de 20° Sur, la variación de latitud es:
a) 11 Sur b) 29° Norte c) 11° Norte d) 29° Sur
5. Si estás situada en el punto -15 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +10?
a) +13 - 3 + 4 b) - 1 + 14 c) + 18 - 5 d) +14 +12 - 1
6. Señala la fracción inversa de la fracción $\frac{5}{9}$: a) $\frac{18}{9}$ b) $\frac{15}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$
7. El resultado de la operación $(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}) \cdot 2 + \frac{51}{10}$ es: a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{105}{10}$ c) $\frac{30}{5}$ d) 3
8. Elige la fracción irreducible que sea el resultado de la operación $\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{9} + \frac{1}{3}$: a) $\frac{65}{18}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{50}{18}$ d) $\frac{25}{9}$
9. Indica cuál de las siguientes fracciones es menor que $\frac{1}{5}$: a) $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{7}$
10. Ordena de menor a mayor los números: 5,67; 5,68; 5,6666; 5,63; 5,5; 5,8; 5,6070.

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1792 que en 5431.
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas. -En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.	La operación $2 + 3 \cdot 7$ tiene como resultado 23, no 35, que es lo que resultaría efectuando antes la suma que el producto.
Números enteros	$Z = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots \}$	
Ordenación de números	Es mayor el que esté más a la derecha en la recta numérica.	$82,6 > 36,1 > 0 > -3 > -36,7$ $-2,59 < -1,3$
Multiplicación	Se multiplican los valores absolutos y se aplica la regla de los signos: $+\cdot + = +; -\cdot - = +; +\cdot - = -; -\cdot + = -$	$(+5) \cdot (+6) = +30$ $(-1) \cdot (-87) = +87$ $(-5) \cdot (+6) = -30$ $(+9) \cdot (-4) = -32$
Fraciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$\frac{10}{25}$ y $\frac{6}{15}$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} =$ $= \frac{27}{30} + \frac{14}{30} = \frac{27+14}{30} = \frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{9}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$\frac{18}{11} < \frac{7}{4} < \frac{15}{8}$
Expresiones decimales	Constan de dos partes: su parte entera y su parte decimal	21'375 Parte entera: 21; Parte decimal: 375
Expresión decimal exacta y periódica	Exacta: Su parte decimal tiene una cantidad finita de cifras. Periódico: Su parte decimal tiene una cantidad infinita de cifras que se repiten periódicamente. Pueden ser puros o mixtos	Exacta: 5,7767 Puro: $3,0\overline{7} = 3,0707070 \dots$ Mixto: $4,8\overline{13} = 4,813131 \dots$