

## CAPÍTULO 10: MAGNITUDES PROPORCIONALES. PORCENTAJES

### RAZÓN Y PROPORCIÓN

**Razón**, en Matemáticas, es una comparación entre los valores de dos variables.

Se expresa en forma de cociente, de forma similar a una fracción y se lee "*A es a B*"

*Ejemplo:*

- Comparamos 3 kg de cerezas por 6 €. Podemos establecer la relación entre el precio (6 €) y la cantidad (3 kg)

$$6 : 3 = 2 \text{ € el kilo} \quad \frac{6}{3} \text{ es la razón entre euros y cerezas.}$$

De esta manera si compramos otras cantidades de cerezas podremos calcular el precio a pagar.

*Ejemplo:*

- La razón que relaciona el gasto de 4 personas y los 200 litros de agua que gastan en un día, puede escribirse:

$$\frac{4 \text{ personas}}{200 \text{ litros}} \text{ o bien } \frac{200 \text{ litros}}{4 \text{ personas}}$$

En cualquiera de los casos estamos expresando que la razón entre litros de agua y personas es:

$$200 : 4 = 50 \text{ litros por persona}$$

Si son 40 personas, la cantidad de agua será 2000 litros, si son dos personas la cantidad de agua será 100 litros, es decir:

$$\frac{4}{200} = \frac{40}{2000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \quad \text{o bien} \quad \frac{200}{4} = \frac{2000}{40} = \frac{100}{2} = \frac{50}{1}$$

#### Ideas claras

Una **razón** es un cociente. Se expresa en forma de **fracción** pero sus términos no expresan una parte de una misma magnitud sino la **relación** entre dos magnitudes. Los términos de la razón pueden ser números enteros o decimales.

#### Actividades propuestas

- Tres personas gastan 150 litros de agua diariamente. ¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?
- Seis kilos de naranjas costaron 6,90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.
- La razón entre dos magnitudes es 56. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes

### 1.2. Proporción

Una **proporción** es la **igualdad** entre dos razones.

Los términos primero y cuarto son los **extremos** y el segundo y tercero son los **medios**:  $\frac{\text{extremo}}{\text{medio}} = \frac{\text{medio}}{\text{extremo}}$

Se llama "**razón de proporcionalidad**" al cociente entre dos variables. Y su valor constante nos permite obtener razones semejantes.

Cuando manejamos una serie de datos de dos pares de magnitudes que presentan una misma razón, se pueden ordenar en un cuadro de proporcionalidad.

*Ejemplo:*

- En el cuadro de abajo se observa que cada árbol da  $\frac{200}{4} = 50$  kg de fruta. Es la **razón de proporcionalidad**.

Con ese dato podemos completar el cuadro para los siguientes casos.

kg de fruta	200	400	100	50	500	150	3000	1000
nº de árboles	4	8	2	1	10	3	60	20

**Propiedad fundamental de las proporciones:** *En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

*Ejemplo:*  $\frac{45}{27} = \frac{30}{18} \Rightarrow 45 \cdot 18 = 30 \cdot 27$

#### Ideas claras

**Observa que** la razón de proporcionalidad nos sirve para establecer una relación entre las dos variables para cualquiera de los valores que puedan adoptar

#### Actividades propuestas

4. Completa las siguientes proporciones:  $\frac{18}{12} = \frac{30}{x}$     b)  $\frac{0,4}{x} = \frac{6}{9}$     c)  $\frac{x}{7,5} = \frac{3,6}{2,4}$     d)  $\frac{0,05}{10} = \frac{x}{300}$

5. Ordena estos datos para componer una proporción: a) 12, 3, 40, 10      b) 24, 40, 50, 30 c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8  
 6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 4,5:

0,5	7	3		20			3,6
		13,5	36		45	18	

## 2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

### 2.1. Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

*Ejemplo:*

- ✚ El número de personas que vienen a comer y la cantidad de comida que necesito. Por ejemplo si el número de personas es el triple habrá que preparar triple cantidad de comida.

Sin embargo, hay relaciones entre magnitudes que no son de proporcionalidad porque cuando una se multiplica o se divide por un número, la otra no queda multiplicada o dividida de la misma forma.

*Ejemplo:*

- ✚ El peso y la edad de una persona no son magnitudes proporcionales: El doble de la edad no significa el doble de peso

### Ideas claras

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, el doble, triple, ... de la primera supone el doble, triple ... de la segunda. Hay magnitudes que no se relacionan proporcionalmente.

### Actividades propuestas

7. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:

- El tamaño de un recipiente y el número de litros que puede contener
- La edad de una persona y su altura
- El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él
- Los kilos de pienso y el número de animales que podemos alimentar
- Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado
- El número de calzado y la edad de la persona

8. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

$$a) \frac{18}{24} = \frac{30}{x}$$

$$b) \frac{25}{100} = \frac{40}{x}$$

$$c) \frac{3,6}{21,6} = \frac{x}{3}$$

9. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

$$a) 3,9 \quad 0,3 \quad 1,3 \quad 0,1$$

$$b) 5, 12, 6, 10$$

$$c) 18 \quad 4 \quad 0,4 \quad 1,8.$$

¿Hay más de una solución?

### 2.2. Regla de tres directa

Para resolver problemas de proporcionalidad directa, podemos utilizar el **método de reducción a la unidad**.

*Ejemplo:*

- ✚ Cinco billetes de avión costaron 690 €. ¿Cuánto pagaremos por 18 billetes para el mismo recorrido?

Primero calculamos el precio de un billete,  $690 : 5 = 138$  €. Después calculamos el coste de los 18 billetes:  $138 \cdot 18 = 2484$  €

La **regla de tres** es otro procedimiento para calcular el cuarto término de una proporción

*Ejemplo:*

- ✚ Con dos kilos de pienso mis gatos comen durante 6 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 15 días?

Formamos la proporción ordenando los datos:  $\frac{2 \text{ kg}}{x \text{ kg}} = \frac{6 \text{ días}}{15 \text{ días}} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5 \text{ kg}$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

$$2 \text{ kg} \quad \text{-----} \quad 6 \text{ días} \quad \quad \quad x = \frac{2 \cdot 15}{6} = 5 \text{ kg}$$

$$x \text{ kg} \quad \text{-----} \quad 15 \text{ días}$$

### Ideas claras

En la regla de tres directa ordenamos los datos de forma que el valor desconocido se obtiene multiplicando en cruz y dividiendo por el tercer término.

Reducir a la unidad significa calcular el valor de uno para poder calcular cualquier otra cantidad.

### Actividades propuestas

10. Un coche gasta 7 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 825 km?

11. En una rifa se han vendido 320 papeletas y se han recaudado 640 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 1000 papeletas?

12. Una paella para 6 personas necesita 750 g de arroz, ¿cuántas personas pueden comer paella si utilizamos 9 kg de arroz?

13. Tres camisetas nos costaron 24,90 €, ¿cuánto pagaremos por 11 camisetas iguales?

## 2.2. Porcentajes

El porcentaje o **tanto por ciento** es la proporción directa más utilizada en nuestra vida cotidiana.

En los comercios, informaciones periodísticas, o en los análisis de resultados de cualquier actividad aparecen porcentajes.

**Un porcentaje es una razón con denominador 100.**

Su símbolo es %.

Su aplicación se realiza mediante un sencillo procedimiento:

*"Para calcular el % de una cantidad se multiplica por el tanto y se divide entre 100"*

**Ejemplo:**

$$\text{Calcula el 23 \% de 800} \quad \text{El 23 \% de 800} = \frac{23 \cdot 800}{100} = 184$$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente al tratarse de un cálculo sencillo:

- ✚ El 50 % equivale a la mitad de la cantidad
- ✚ El 25 % es la cuarta parte de la cantidad
- ✚ El 75 % son las tres cuartas partes de la cantidad
- ✚ El 10 % es la décima parte de la cantidad
- ✚ El 200 % es el doble de la cantidad

**¡¡GRANDES REBAJAS!!  
40 % DE DESCUENTO  
EN TODOS LOS  
ARTÍCULOS**

**Ejemplo:**

$$\text{El 25 \% de 600 es la cuarta parte de 600, por tanto es } 600 : 4 = 150$$

### Ideas claras

Si cualquier cantidad la divides en 100 partes, el 22 % son veintidós partes de esas cien.

El total de una cantidad se expresa como el 100 %

### Actividades propuestas

14. Calcula mentalmente:

- a) El 50 % de 190      b) el 1 % 360      c) el 10 % de 200      d) el 300 % de 7

15. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
280	16	
720		108
60	140	
	60	294

16. En un hotel están alojadas 320 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

## 3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos "escala"

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

**Ejemplo:**

En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 20 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 20 000 cm en la realidad.

**Ejemplo:**

Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala 1 : 600. Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3,5 cm. La altura real de las torres será:  $3,5 \cdot 600 = 2100 \text{ cm} = 21 \text{ m}$ .

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes**.

### Ideas claras

La **escala** utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.

Por ejemplo: 1: 70000

**Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.**

### Actividades propuestas

17. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

18. La distancia entre Madrid y Burgos es 243 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 8,1 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

19. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 5000

Dibujo	Medida real
18 cm	
	3 km
0,008 m	

20. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
2,5 cm	800 m	
4 cm	6,4 hm	
5 cm	9 km	

### RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplo
Razón	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
Proporción	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
Magnitudes directamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número	24 es a 10 como 240 es a 100
Razón de Proporcionalidad directa	Cociente entre los valores de dos magnitudes	$\frac{300}{25}$
Porcentajes	Razón con denominador 100	$\frac{23}{100}$
Escalas y planos	Comparación entre tamaño real y tamaño representado	1 : 20000
Magnitudes inversamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número	A por B es igual a C por D
Razón de proporcionalidad inversa	Producto de ambas magnitudes	45 · 70

### PORCENTAJE CON CALCULADORA

En la calculadora puedes encontrar una función que te permite calcular el % de manera directa.

Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. Escribe la cantidad
2. Multiplica por el tanto
3. Pulsa SHIFT y %. El resultado que aparece en la pantalla es la solución.

650	·	16	SHIF	%	=	104
-----	---	----	------	---	---	-----

Una forma fácil de añadir o restar el importe del tanto por ciento a la cantidad final puede hacerse de la siguiente forma:

- Sigue los pasos 1,2 y 3 anteriores
- Pulsa la tecla + si lo que quieres es un aumento porcentual
- Pulsa la tecla - para una disminución porcentual

1370	·	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4
------	---	----	-------	---	-------	---	--------

1370	·	12	SHIFT	%	164.4	-	1205.6
------	---	----	-------	---	-------	---	--------

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa la razón entre las edades de Jorge, 26 años, y Andrés, 32 años
2. Expresa la razón entre las 20 personas que acuden a comer un restaurante y los 440 € que se recaudan.
3. En un examen de 30 preguntas un estudiante ha contestado 21 bien y 9 mal. Expresa las razones entre estos resultados y el total de las preguntas

4. Copia en tu cuaderno y relaciona las magnitudes de ambas columnas para que cada ejemplo responda a pares de magnitudes directamente proporcionales:

Número de kilos de patatas y	Litros de gasolina necesarios,
Cantidad de agua necesaria y	Personas que viven en un edificio
Dinero disponible y	Vestidos confeccionados
Kilómetros a recorrer y	Número de personas que vienen a comer
Metros de tela y	Prendas que podemos comprar

5. Con estas seis magnitudes debes elaborar tres razones:  
Número de personas, horas, cantidad de leche, litros de refresco, distancia entre dos ciudades, número de vacas

6. Calcula el cuarto término de las siguientes proporciones:

$$a) \frac{36}{20} = \frac{45}{x}$$

$$b) \frac{12,6}{x} = \frac{0,2}{0,5}$$

$$c) \frac{1}{0,25} = \frac{x}{3}$$

$$d) \frac{x}{2} = \frac{35}{5}$$

7. Esta receta es para 4 personas. Elabora dos recetas similares para 6 personas y para 15 personas

**ARROZ CON VERDURAS**

380 g de arroz  
1 kg de tomate triturado  
800 g de calabacín  
3 dientes de ajo  
120 cl de aceite  
1 kg champiñón  
1/2 kg pimientos rojos y verdes



8. Completa la tabla de proporcionalidad directa:

<b>Distancia</b>	100	240		360	
<b>Litros</b>	6,5		52		2,6

9. Una lata de mejillones de 200 g vale 2,40 €. Otra lata de 700 g se vende a 7,20 €, ¿cuál de las dos es proporcionalmente más barata?
10. ¿Cuánto dinero nos costarán 6 ordenadores sabiendo que 56 ordenadores han costado 28 000 €?
11. Cálculo Mental:
- |             |             |             |            |
|-------------|-------------|-------------|------------|
| 3 % de 40   | 20 % de 800 | 12 % de 70  | 3 % de 120 |
| 25 % de 300 | 15 % de 60  | 150 % de 30 | 200 % de 2 |
12. Completa mentalmente:
- a) El .....% de 30 es 3      b) El .....% de 500 es 250      c) El .....% de 400 es 4  
d) El 20% de ..... es 8      e) El 75% de ..... es 30      f) El 150% de ..... es 60

13. Calcula el 300 % del 10 % de 480.

14. ¿Qué porcentaje ocupan los cuadros negros?

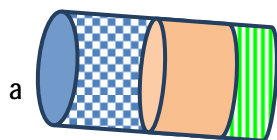

15. Copia esta tabla en tu cuaderno y colorea un porcentaje que represente el 40 %.


16. Rosana gasta el 15 % de su dinero y Marta gasta el 50 % del suyo. Sin embargo Marta ha gastado menos dinero que Rosana, ¿cómo es posible?

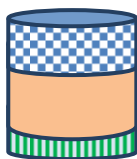
17. Completa la tabla:

%	Cantidad	Resultado
45	1024	
	23	115
18		162

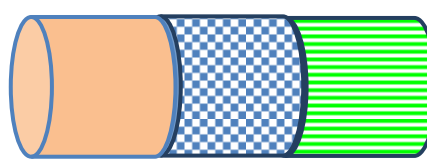
18. ¿Cuál de estos dibujos contiene mayor proporción de color naranja en relación a su tamaño? ¿Y de rayas? ¿y de cuadros?



b



c

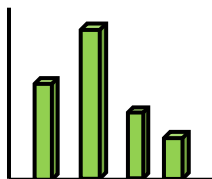


Haz una estimación en tantos por ciento para cada cilindro y cada parte.

19. En la oficina de mi madre, el 18 % de sus compañeros juegan a la BONOLOTO, el 56 % juegan al EUROMILLÓN, el 20 % juegan a la PRIMITIVA, y los 3 trabajadores restantes no juegan a nada. ¿Cuántas personas trabajan en esa oficina?
20. Un adulto respira unos 5 litros de aire por minuto. ¿Cuántos litros respira en una semana?
21. En 2 km ascendemos 40 m, respecto a la horizontal, ¿qué % hemos ascendido?



22. El guepardo es el animal terrestre más rápido, ya que es capaz de alcanzar una velocidad máxima de 130 km hora. ¿Cuántas horas tardaría un guepardo, sin parar, en viajar desde Valencia hasta Barcelona? ¿Y de Palencia hasta Cádiz?
23. Haz un informe sobre el animal que más corre, el que más vive, el que más come, el que más tiempo puede pasar sin comer o sin beber.
24. Si el dólar se cotiza a 1,12 €, ¿Cuántos dólares obtendremos al cambiar 360 €?
25. En estadística se utilizan los gráficos para expresar la evolución de los valores de una variable respecto a otra. Si asignamos a la barra más alta el valor 100, calcula de forma aproximada la altura de las demás. Si la barra más pequeña pesa 0,5 kg. ¿Cuánto pesarán cada una de las otras barras?



26. En un plano de carreteras la distancia entre dos ciudades es de 6 cm. Si la escala es 1 : 40000, calcula la distancia real.
27. Calcula la escala a la que está dibujado un plano sabiendo que 15 cm del plano corresponden a 375 km.
28. En el antiguo Egipto, para definir la proporción de las diferentes partes del cuerpo, se usaba la longitud de los dedos y para el canon, los puños. Una cabeza debía medir dos puños. Los griegos utilizaban, al igual que los egipcios, la proporción para valorar los distintos cánones de belleza. Un cuerpo bien proporcionado debía tener una longitud proporcional a la cabeza. Alguno de los más conocidos corresponden a famosos escultores:

	Canon de Praxíteles	Canon de Polikletos	Canon egipcio
Medida del cuerpo	Ocho cabezas	Siete cabezas	16 puños

29. Con estos datos puedes investigar sobre qué proporción es la más frecuente entre tus amigos
30. Hay otras maneras de estudiar la proporción en la figura humana. La proporción áurea, conocida por los griegos y desarrollada de manera brillante por Leonardo de Vinci nos ha dejado imágenes como el famoso "Hombre de Vitrubio". Busca información sobre esta figura.

### AUTOEVALUACIÓN

1. El valor de  $x$  en la proporción  $\frac{2,4}{x} = \frac{0,8}{3}$  es: a) 0,9 b) 1,2 c) 9 d) 0,9
2. En una caja por cada tres bolas blancas hay cinco bolas rojas. Si hay 108 bolas blancas, las bolas rojas son:  
a) 200 b) 180 c) 220 d) 210
3. Para una excursión un grupo de 28 personas contrató un autobús. Cada una debe pagar 45 €. Como quedaban plazas libres, a última hora se han apuntado 7 personas más. ¿Cuánto deben pagar finalmente cada una?  
a) 36 € b) 30 € c) 38 € d) 40 €
4. Una bicicleta se vende por 225 €. Si hacen un descuento del 14 % ¿Cuánto tendremos que pagar?  
a) 201,50 € b) 198,50 € c) 214 € d) 193,50 €
5. En un mapa 16 cm equivalen a 208 km. La escala es: a) 1: 320000 b) 1: 2100000 c) 1: 20800000 d) 1: 1 300 000
6. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son: a) 24, 69,48 b) 16, 49, 68 c) 16,5, 69, 48

Personas	8	11	46	
Kg de comida	12			72

7. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son: a) 60, 60, 42, 20 b) 60, 42, 42, 20 c) 60, 21, 42, 20

Nº de trabajadores	12	7			21
Horas diarias	35		10	7	

8. Los valores que completan las operaciones siguientes son:  
El 25 % de 0,28 es ... El ... % de 630 es 63. El 150 % de ... es 120  
a) 0,07, 10, 80 b) 0,7, 10, 90 c) 0,7, 3, 80
9. Al efectuar un incremento porcentual del 18% sobre estas tres cantidades, 350, 99 y 6 obtenemos:  
a) 413; 116,82; 7,08 b) 630; 116,82; 7,08 c) 403; 112; 7,08