

CAPÍTULO 8: FIGURAS PLANAS

1. ELEMENTOS DEL PLANO

1.1. Puntos, rectas, semirrectas, segmentos.

El elemento más sencillo del plano es el punto. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Es muy útil nombrarlo y para ello se utilizan letras mayúsculas A, B, C, ... Al igual que el punto, la recta es un objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas r, s, t, \dots

Una semirrecta es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta p, \dots

Un segmento es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento

AB o segmento de extremos A, B.

Actividades propuestas

- Copia en tu cuaderno el siguiente dibujo y realiza las siguientes actividades.
- Dibuja tres segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas r y s .
- ¿El punto B pertenece a la recta s ? ¿Y a la recta r ?
- Dibuja un segmento que tenga como extremos A y un punto que esté en las rectas r y s .
- Dibuja una semirrecta de origen C y que pase por B.
- ¿Es posible dibujar una recta que pase a la vez por M, F y G? ¿Y por N, A y E?

1.2. Rectas paralelas y secantes.

Pensemos ahora en las diferentes posiciones que pueden ocupar dos rectas en un plano:

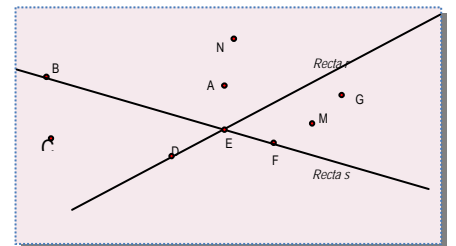
Rectas paralelas: No tienen ningún punto común

Rectas secantes: Tienen un único punto común

Rectas coincidentes: Todos sus puntos son comunes



Imagina que cada uno de los límites de la hoja de tu cuaderno, de la pizarra o de cada una de las paredes de la habitación en la que estás, se prolonga indefinidamente sin cambiar su inclinación o posición. Los objetos resultantes serían ejemplos de planos. Para representarlos y estudiar bien sus elementos, nos quedaremos solo con una parte de cada uno. Por ejemplo, en los casos anteriormente citados, con la misma hoja, la pizarra o la pared tal como las vemos.



Por un punto P exterior a una recta r solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

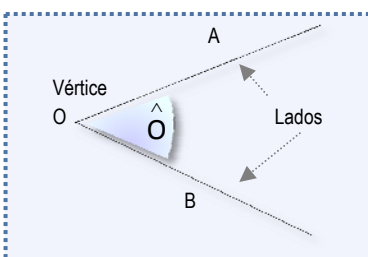
Ejemplo:

A nuestro alrededor encontramos objetos cotidianos en los que se aprecian paralelas y secantes

Actividades propuestas

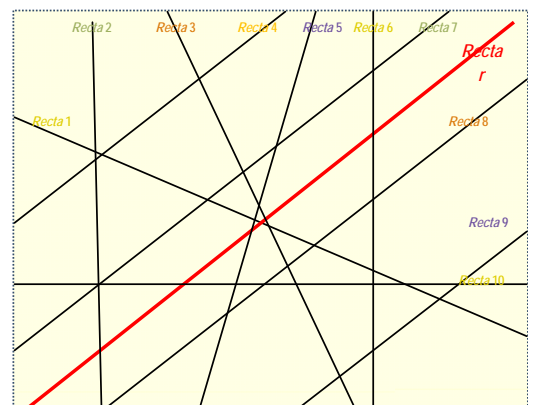
- Dibuja cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.
- Observa el dibujo de la izquierda e indica qué rectas son paralelas a r y qué rectas son secantes a r .

1.3. Ángulos. Tipos de ángulos.



Se llama **ángulo** a la región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman **lados** y el origen **vértice**.

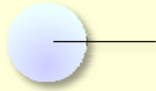
Para nombrar un ángulo podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último puntos sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo \wedge .



En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = \hat{AOB}$

Asociados a semirrectas especiales definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas. Nos referimos a ángulos completos, llanos y rectos.

Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.



Ángulo llano: Es la mitad de un ángulo completo.

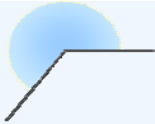


Ángulo recto: Es la mitad de un ángulo llano.

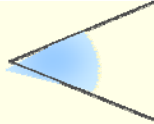


Un ángulo puede ser cóncavo o convexo dependiendo de que su amplitud sea mayor o menor que un ángulo llano.

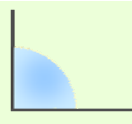
Además los ángulos convexos se clasifican en rectos, agudos, si son menores que un recto y obtusos, si son mayores que un recto



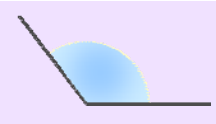
Cóncavo



Agudo



Recto



Obtuso

Se llaman ángulos *consecutivos* a dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común. Un caso particular son los ángulos *adyacentes* que son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo llano.

Se llaman ángulos *opuestos por el vértice* a los ángulos que tienen el mismo vértice y tales que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

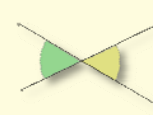
Ejemplo:



Consecutivos



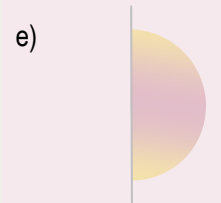
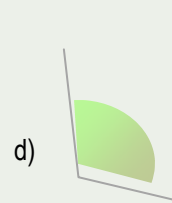
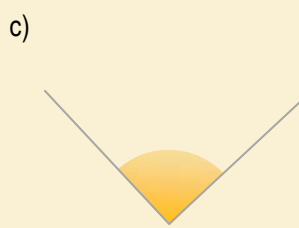
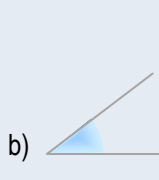
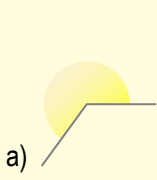
Adyacentes



Opuestos por el vértice

Actividades propuestas

8. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



9. Dibuja tres rectas secantes dos a dos (aunque cualquier pareja que elijas entre ellas sea una pareja de rectas secantes, no pasan las tres por un mismo punto) e indica todas las parejas de ángulos adyacentes, consecutivos y opuestos por el vértice que se encuentran tu dibujo.

1.4. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado *sistema sexagesimal*. La unidad de medida es el *grado sexagesimal*. Se representa con el símbolo $^{\circ}$ y se define como $1/360$ de un ángulo completo.

$$1^{\circ} = 1 / 360 \text{ parte de un ángulo completo}$$

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = $1' = 1/60$ parte de un grado

Segundo 1 segundo = $1'' = 1/60$ parte de un minuto

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma compleja*. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

$$1 \text{ ángulo completo} = 360^{\circ}$$

$$1 \text{ ángulo llano} = 180^{\circ}$$

$$1 \text{ ángulo recto} = 90^{\circ}$$

$$1^{\circ} = 60 \text{ minutos} = 3600 \text{ segundos}$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Forma compleja: } & A = 12^\circ 40' 32'' \quad B = 13' 54'' \quad C = 120^\circ 23'' \\ \text{Forma incompleja: } & D = 35000'' \quad E = 23^\circ \quad F = 34' \end{aligned}$$

Ejemplo:

Paso de forma compleja a forma incompleja:

$$A = 12^\circ 23' 10'' = 12 \cdot 3600'' + 23 \cdot 60'' + 10'' = 44590''$$

Ejemplo:

Paso de forma incompleja a compleja: $D = 35000''$

$$\begin{array}{r} 35000'' \\ \underline{500} \\ 200 \\ \underline{20''} \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ \underline{583'} \\ 43' \\ \underline{9^\circ} \end{array} \quad \begin{array}{r} 583' \\ \underline{43'} \\ 9^\circ \end{array}$$

$$D = 35000'' = 583' 20'' = 9^\circ 43' 20''$$

Actividades propuestas

10. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

- a) $12500''$ b) $83'$ c) $230''$ d) $17600''$

11. Pasa de forma compleja a forma incompleja

- a) $12^\circ 34' 40''$ b) $13^\circ 23' 7''$ c) $49^\circ 56' 32''$ d) $1^\circ 25' 27''$

12. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8465''		
	245' 32''	
		31° 3' 55''

1.5. Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal.

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo:

$24^\circ 43' 29''$	$77''$	60	$73'$	60
$45^\circ 29' 48''$	$17''$	$1'$	$13'$	1°
$69^\circ 72' 77''$	$N^\circ \text{ minutos} = 72' + 1' = 73'$		$N^\circ \text{ de grados} = 69^\circ + 1^\circ = 70^\circ$	

$$24^\circ 43' 29'' + 45^\circ 29' 48'' = 69^\circ 72' 77'' = 69^\circ 73' 17'' = 70^\circ 13' 17''$$

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

$65^\circ 48' 50''$		
$45^\circ 29' 48''$		
$20^\circ 19' 2''$		$65^\circ 48' 50'' - 45^\circ 29' 48'' = 20^\circ 19' 2''$

Ejemplo:

$37^\circ 60'$	$71' 60''$	
$38^\circ 12' 14''$	$37^\circ 72' 14''$	$37^\circ 71' 74''$
$15^\circ 15' 15''$	$15^\circ 15' 15''$	$15^\circ 15' 15''$
		$22^\circ 56' 59''$

$$38^{\circ} 12' 14'' - 15^{\circ} 15' 15'' = 37^{\circ} 72' 14'' - 15^{\circ} 15' 15'' = 37^{\circ} 71' 74'' - 15^{\circ} 15' 15'' = 22^{\circ} 56' 59''$$

Actividades propuestas

13. Calcula:

- a) $34^{\circ} 45' 30'' + 12^{\circ} 27' 15''$ b) $16^{\circ} 30' 1'' + 12^{\circ} 13' 12'' + 2^{\circ} 1'$
 c) $16^{\circ} 45' + 23^{\circ} 13'' + 30^{\circ} 20' 30''$ d) $65^{\circ} 48' 56'' - 12^{\circ} 33' 25''$
 e) $35^{\circ} 54' 23'' - 15^{\circ} 1' 35''$ f) $43^{\circ} 32' 1'' - 15^{\circ} 50' 50''$

1.6. Ángulos complementarios y suplementarios

Se llaman ángulos complementarios a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90°)

Se llaman ángulos suplementarios a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180°)

Ejemplo:

En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y B son ángulos complementarios. C y D son suplementarios.

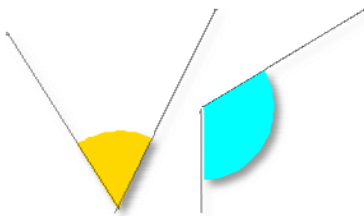
Ejemplo:

El ángulo $= 12^{\circ}$ es el complementario de $= 78^{\circ}$ y el suplementario de $= 168^{\circ}$



Actividades propuestas

14. Copia en tu cuaderno y dibuja el complementario del ángulo y el suplementario del ángulo .



15. Calcula los ángulos complementario y suplementario de:

- a) $35^{\circ} 54' 23''$ b) $65^{\circ} 48' 56''$
 c) $43^{\circ} 32' 1''$ d) $30^{\circ} 20' 30''$

16. Indica si las siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o ninguna de las dos cosas:

- a) $15^{\circ} 34' 20''$ y $164^{\circ} 25' 40''$ b) $65^{\circ} 48' 56''$ y $24^{\circ} 12' 4''$ c) $43^{\circ} 32' 1''$ y $30^{\circ} 26' 59''$

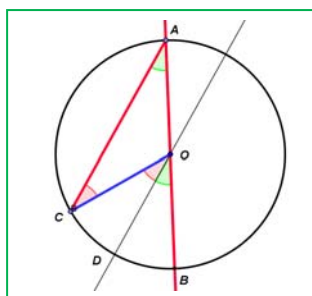
1.7. Ángulos en la circunferencia

En una circunferencia tienen especial importancia los ángulos centrales (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los ángulos inscritos (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

Ángulo central	Ángulo inscrito	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

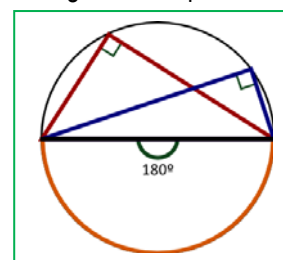
Demostración:



Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia CAB que tenga un lado que pase por el centro O de la circunferencia. Trazamos su central COB . El triángulo OAC es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por O una recta paralela a AC . El ángulo CAO es igual al ángulo DOB pues tienen sus lados paralelos. El ángulo ACO es igual al ángulo COD por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo CAO por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.

Actividades propuestas

17. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.

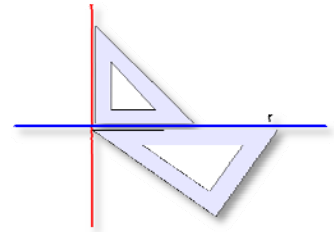


18. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?

1.8 Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento.

Dos rectas son perpendiculares si forman un ángulo recto. Es un caso especial de rectas secantes.

Para construir una recta perpendicular a una recta dada r , se adapta un cartabón a r y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.



La mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio

Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

Con un compás y una regla podemos trazar fácilmente la mediatriz de un segmento dado.

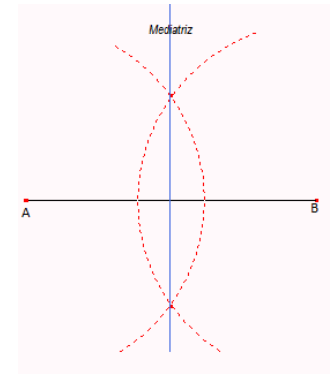
Debemos seguir los pasos

Se dibuja el segmento AB .

Con centro en A y con radio R mayor que la mitad del segmento, se traza un arco que corte al segmento AB .

Con el mismo radio se traza un arco de centro B .

Se unen los puntos comunes de los dos arcos. Esta recta es la mediatriz.



Actividades propuestas

19. ¿Es posible dibujar tres rectas, secantes dos a dos de modo que haya exactamente:

a) Una pareja de rectas perpendiculares? b) ¿Dos parejas de rectas perpendiculares?

c) ¿Las tres parejas de rectas sean perpendiculares?

20. Dibuja la mediatriz de un segmento de 6 cm de longitud.

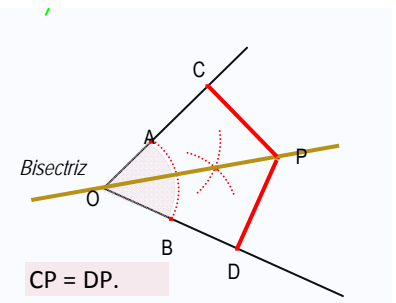
21. Dibuja un segmento de longitud 8 cm, su mediatriz y una recta perpendicular al segmento de partida que esté a una distancia de 5 cm de la mediatriz. ¿Qué posición ocupa esta recta con respecto al segmento de partida?

1.9. Bisectriz de un ángulo.

La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los 2 lados del ángulo. Puedes observar que en la figura del ejemplo adjunto que $CP = DP$.

Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice O , se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, A y B . A continuación, con centros en A y B respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia AB , trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice O nos da la bisectriz.



Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.

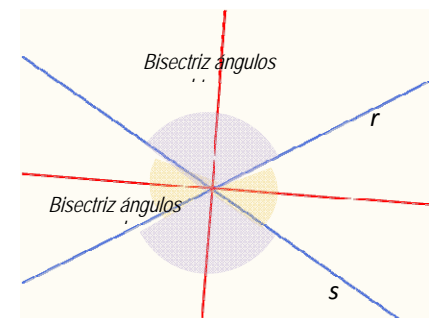
Ejemplo:

En la figura observamos que las bisectrices de los ángulos que forman r y s son perpendiculares.

Actividades propuestas

22. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:

a) 45° b) 130° c) 70° d) 45°



1.10. Primeros pasos con Geogebra

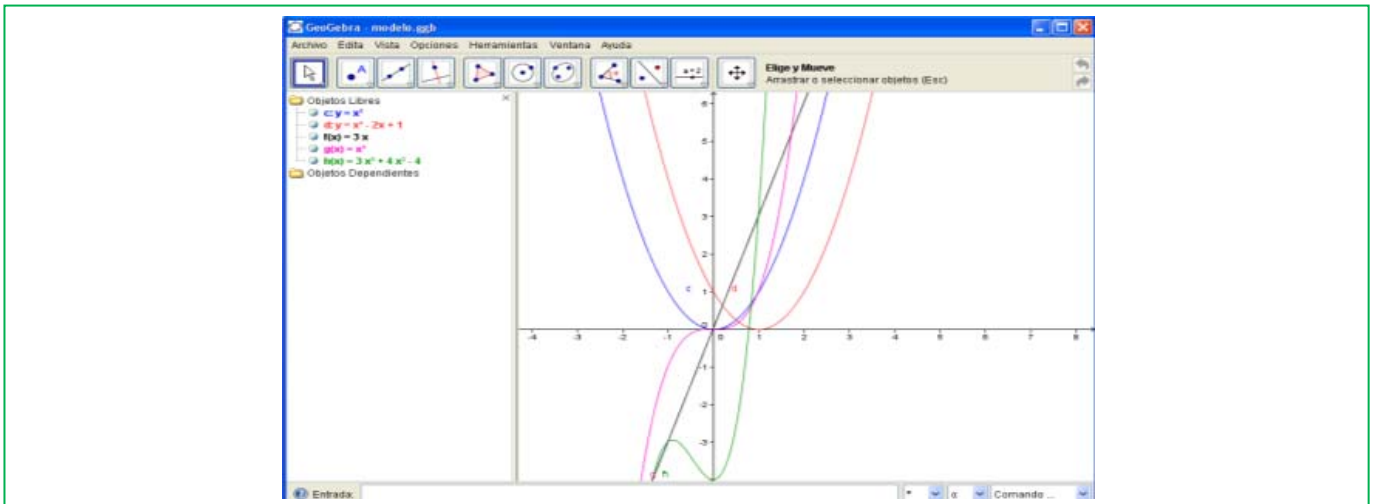
La ventana de Geogebra

Al ejecutar el programa *Geogebra* la ventana que aparece tiene muchos componentes comunes con cualquier ventana de Windows.

El elemento más característico de este programa es la barra de herramientas en la que aparecen iconos. Cada uno de ellos se activa al hacer clic con el ratón sobre él y se desactiva cuando se selecciona otro. Estos primeros iconos que aparecen se corresponden con la primera opción que encontramos en el menú desplegable que se obtiene al mantener pulsado el ratón sobre cada uno de ellos.

Otra particularidad es que el área de trabajo está dividida en dos partes la ventana geométrica, donde se realizan las construcciones geométricas, y la ventana algebraica en la que aparecen características de los elementos que se construyen en la ventana geométrica como son las coordenadas de los puntos, las longitudes de los segmentos, el área de los polígonos, las ecuaciones de rectas, circunferencias,

También se pueden realizar operaciones introduciendo los números o el nombre de los elementos en el Campo de Entrada que se encuentra en la parte inferior de la ventana, los resultados aparecen en la ventana algebraica. Con las opciones de Visualiza de la barra de menús se puede ocultar o mostrar, la ventana algebraica, el campo de entrada así como los ejes y la cuadrícula de la ventana geométrica.



Los iconos **Deshace** y **Rehace** que se encuentran en la parte superior derecha de la ventana geométrica y como opciones del menú **Edita** permiten eliminar o volver a mostrar una acción realizada.

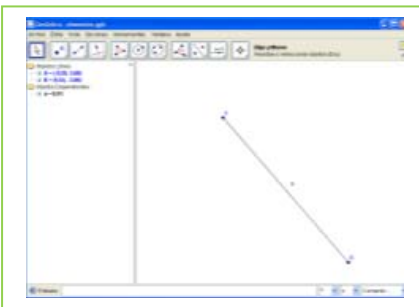
El menú contextual, el que se obtiene al hacer clic con el botón derecho del ratón sobre el objeto de la ventana geométrica o de la algebraica, tiene múltiples posibilidades, permite entre otras funciones borrar, ocultar, cambiar el nombre y modificar la apariencia de los objetos construidos.

Elementos geométricos

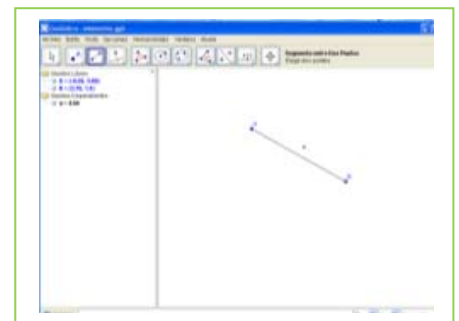
Actividades resueltas

Antes de comenzar comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la ventana algebraica y desactiva ejes y cuadrícula.

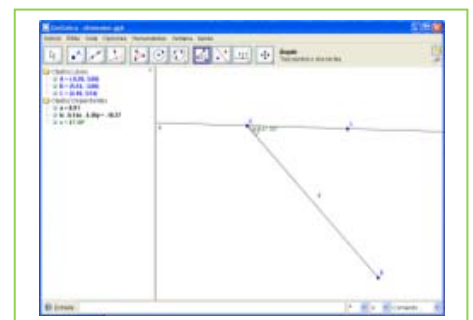
- Con la herramienta **Nuevo punto** dibuja un punto en la ventana geométrica, el sistema lo denomina A y sus coordenadas aparecen en la ventana algebraica, en la carpeta de los objetos libres.
- Dibuja otro punto B y con la herramienta **Segmento entre dos puntos** traza el segmento, a , que pasa por los puntos A y B . En la ventana algebraica aparece la longitud del segmento en la carpeta de objetos dependientes.



- Con la herramienta **Desplaza**, la primera de la barra de herramientas, agarra el punto B y cambia su posición, observa de qué forma cambian sus coordenadas y la longitud del segmento.



- Dibuja otro punto C , que no pertenezca al segmento, y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** traza la recta, b , que pasa por A y C .



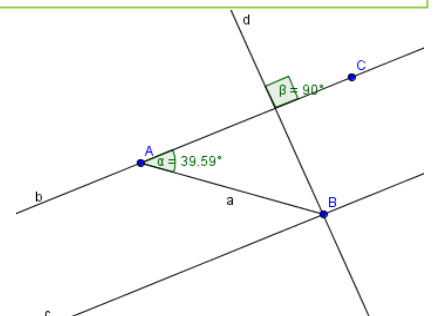
- Activa la herramienta **Ángulo** y señala con el ratón los puntos B , A y C , obtienes la medida del ángulo que has señalado. El orden para señalar los puntos B y C debe ser el contrario al de las agujas del reloj.

Rectas paralelas y perpendiculares

Actividades resueltas

Con la herramienta **Recta paralela** traza una recta, c , que pasa por el punto B y es paralela a la recta b que pasa por los puntos A y C .

- Utiliza la herramienta **Recta perpendicular** para trazar una recta, d , que pasa por el punto B y es perpendicular a la recta b .
- Calcula la medida del ángulo que forman las rectas b y d .
- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos A , B y C y observa que cambian



TEORÍA: Matemáticas 1º ESO. Capítulo 8: Figuras planas

www.apuntesmareaverde.org

LibrosMareaVerde.tk



Autora: Milagros Latasa Asso

Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

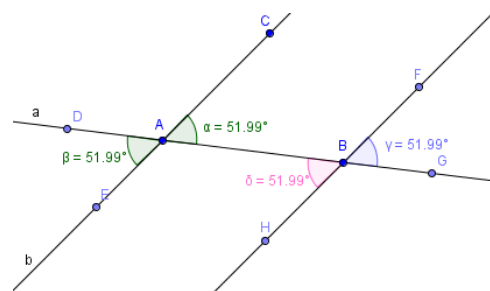
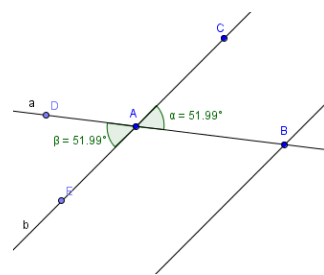
de posición pero se mantienen las propiedades geométricas de la construcción, por ejemplo, las rectas b y c permanecen paralelas entre sí y perpendiculares a la recta d .

Ángulos

Actividades resueltas

Abre una nueva ventana de *Geogebra*, en el menú Visualiza desactiva Ejes y Cuadrícula

- Determina tres puntos A , B y C , no alineados, la recta, a , que pasa por A y B y la recta, b , que pasa por los puntos A y C .
- Traza la recta paralela, c , que pasa por B y es paralela a la recta a .
- Calcula la medida del ángulo, α , que determinan los puntos B , A y C , señalando los puntos B y C en orden contrario al sentido de las agujas del reloj.
- Elige un punto D de la recta a y otro E de la recta b para determinar y medir un ángulo, β , opuesto por el vértice al ángulo α .
- Determina y mide un ángulo γ tal que los ángulos α y γ sean *correspondientes entre paralelas* y con la opción propiedades del menú contextual cambia su color.
- Determina y mide un ángulo δ tal que los ángulos α y δ sean *alternos internos entre paralelas* y con la opción propiedades del menú contextual cambia su color.
- Con la herramienta Desplaza, mueve los puntos A , B y C y observa que cambian de posición pero los ángulos α , β , γ y δ miden lo mismo.
- Indica dos ángulos de los que has dibujados que sean *alternos externos entre paralelas*.



Actividades propuestas

- Repita la actividad resuelta de elementos geométricos. Colócate encima del segmento a , aprieta el botón derecho, entra en Propiedades y modifica el color, haz que sea rojo. Lo mismo con la recta b , pero ahora coloréala en azul. Mueve el punto B para observar cómo se modifican las longitudes y el ángulo.
- Dibuja con *Geogebra* cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.
- Dibuja con *Geogebra* dos rectas paralelas cortadas por una secante y mide todos los ángulos que se formen.
- Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados paralelos y comprueba que miden lo mismo.
- Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados perpendiculares y comprueba que miden lo mismo.
- Dibuja con *Geogebra* dos ángulos que sean complementarios y dos que sean suplementarios.
- Dibuja con *Geogebra* un ángulo inscrito en la circunferencia y el central que abarca el mismo arco. Comprueba que el ángulo inscrito mide la mitad del central. Mueve uno de los puntos sobre la circunferencia y comprueba que esa relación permanece.

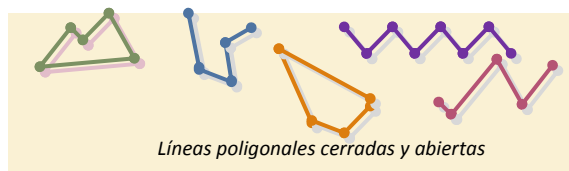
2. POLÍGONOS

2.1. Líneas poligonales y polígonos.

Una línea poligonal es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente.

Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es abierta.

Un polígono es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.



Ejemplo:



2.2. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales

Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono.

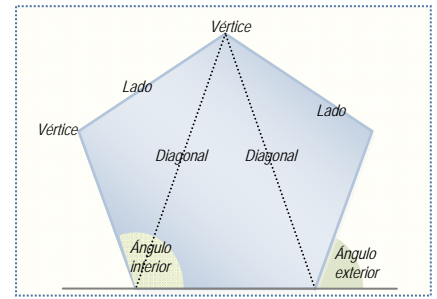
Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices**.

Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal**.

Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.

Dos polígonos son iguales si tienen los lados y los ángulos *iguales*. En algunos casos basta con saber que se cumplen condiciones menos exigentes (llamadas *critérios de igualdad*) para garantizarlo. Veremos por ejemplo tres criterios de igualdad de triángulos.

30. Copia los dibujos siguientes y traza todas las diagonales de cada polígono:



2.3. Clasificación de los polígonos

Según los ángulos los polígonos se clasifican en dos grandes grupos: cóncavos y convexos dependiendo de que todos sus ángulos sean convexos o de que tengan como *mínimo* un ángulo cóncavo

Polígonos cóncavos

Polígonos convexos

Por el número de lados, los polígonos se clasifican en:

Triángulo <i>Tres lados</i>	Cuadrilátero <i>Cuatro lados</i>	Pentágono <i>Cinco lados</i>	Hexágono <i>Seis lados</i>	Heptágono <i>Siete lados</i>	Octógono <i>Ocho lados</i>

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**. Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares**. Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular**.

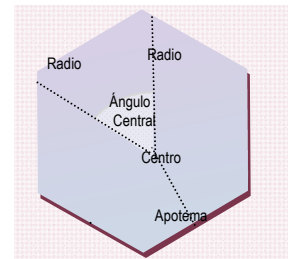
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. El apotema es perpendicular al lado.



Actividades propuestas

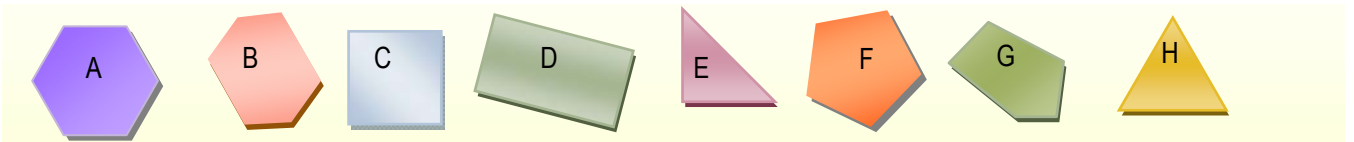
31. Dibuja los polígonos siguientes y traza todas sus diagonales:

- a) Hexágono b) Pentágono c) Octógono d) Trapezoide

32. Dibuja, si es posible, un ejemplo de polígono que sea:

- a) triángulo cóncavo b) pentágono convexo c) hexágono cóncavo d) cuadrilátero convexo regular.

33. Observa las figuras e indica qué polígonos son equiángulos, equiláteros, regulares e irregulares. Puedes copiar la tabla inferior en tu cuaderno y completarla



	A	B	C	D	E	F	G	H
EQUIÁNGULO								
EQUILÁTERO								
REGULAR								
IRREGULAR								

34. Dibuja en tu cuaderno el apotema de: a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un hexágono regular.



3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3.1. Circunferencia y círculo

Una circunferencia es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama círculo.

3.2. Elementos de una circunferencia.

Se llaman elementos de una circunferencia a ciertos puntos y segmentos singulares de la misma. Los describimos a continuación

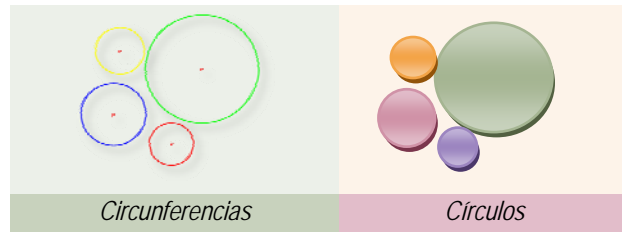
El centro es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

El radio de una circunferencia es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Se nombra con la letra r o bien con sus puntos extremos. La medida del radio es constante.

El diámetro de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.

Una cuerda es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.

Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama arco.



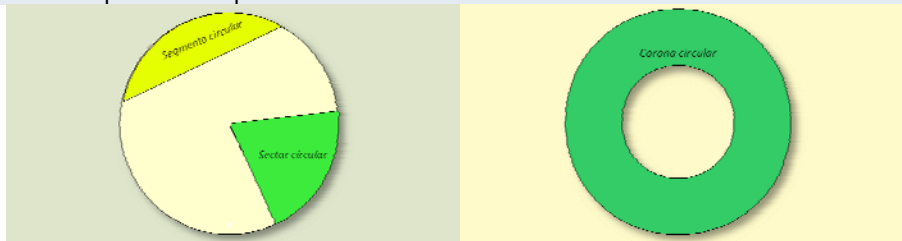
Un arco de circunferencia se denota con el símbolo \frown sobre las letras que designan los puntos extremos del arco. Por ejemplo el arco de extremos A, B se escribe $\frown AB$. Un caso particular es la semicircunferencia, arco delimitado por los extremos de un diámetro

3.3. Sector circular y segmento circular. Corona circular.

Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios.

Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos.

Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.



El ángulo que forman los dos radios que determinan un sector circular, se llama *ángulo central*. Si el ángulo central es llano, el sector circular es un semicírculo.

Actividades propuestas

35. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y en ella un sector circular de 30° de amplitud.

36. En la circunferencia anterior, indica si es posible trazar una cuerda en cada uno de los casos siguientes y hazlo en caso afirmativo: a) de 4 cm de longitud, b) de 8 cm, c) mayor de 8 cm.

3.4. Posiciones entre una recta y una circunferencia.

Una recta puede tener dos puntos comunes con una circunferencia, uno o ninguno.



El punto común de una circunferencia y una recta tangentes, se llama *punto de tangencia*

La distancia del centro de la circunferencia a una recta es menor, igual o mayor que el radio, dependiendo de que sean secantes, tangentes o exteriores

3.5. Propiedades importantes de las circunferencias y sus elementos

Algunas construcciones geométricas como el trazado de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, la búsqueda del centro de un arco de circunferencia o el dibujo de una recta tangente a una circunferencia cuando se conoce el punto de tangencia, se pueden resolver gracias a estas propiedades que seleccionamos



Actividades propuestas

37. Dibuja tres puntos que no estén en línea recta de modo que el primero esté a 2 cm de distancia del segundo y el segundo a 3 cm del tercero. Finalmente traza la circunferencia que pase por los tres.

4. TRIÁNGULOS

Como hemos visto antes, un triángulo es un polígono de tres lados. Estudiaremos en este párrafo dos clasificaciones de los triángulos, dos propiedades importantes comunes a todos los triángulos y descubriremos los llamados rectas y puntos notables de un triángulo.

4.1. Clasificación de los triángulos

Según los lados los triángulos se clasifican en equiláteros, isósceles y escalenos



Según los ángulos los triángulos se clasifican en



En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el tercero se denomina *hipotenusa*.

4.2. Propiedades fundamentales de un triángulo.

La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .

De esta propiedad se deducen las consecuencias siguientes:

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60° .

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Es preciso tener en cuenta esta propiedad para saber si tres segmentos dados pueden o no ser los lados de un triángulo

Actividades propuestas

38. Dibuja en un papel un triángulo, divídelo en tres partes y coloréalas con tres colores diferentes.

Después recórtalas y forma con ellas un ángulo llano. De esta forma, habrás demostrado que la suma de sus ángulos es 180° .

39. Calcula el valor del tercer ángulo de un triángulo si dos de ellos miden respectivamente:

a) 30° y 80° b) 20° y 50° c) 15° y 75° d) $40^\circ 30'$ y $63^\circ 45'$.

40. Clasifica, según sus ángulos, los triángulos del ejercicio anterior.

41. Construye un triángulo rectángulo isósceles.

42. Indica razonadamente si es posible construir un triángulo cuyos lados midan:

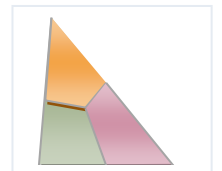
a) 5 cm, 4 cm y 3 cm b) 10cm, 2 cm y 5 cm c) 2dm, 2dm 4 dm d) 13 m, 12 m y 5 m

4.3. Rectas y puntos notables de un triángulo

En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

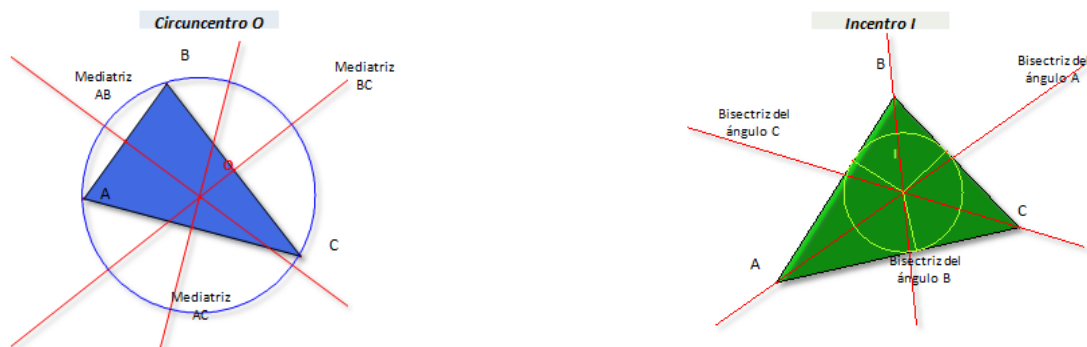
En todo triángulo existen tres rectas de cada uno de los tipos mencionados y tienen la propiedad de pasar por un mismo punto. Los puntos de intersección de estos grupos de rectas se denominan puntos notables

Las mediatrices de los tres lados del triángulo concurren en un punto llamado **circuncentro** (O en la figura izquierda del



ejemplo). Dicho punto equidista de los vértices y, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto llamado incentro (I en la figura de la izquierda).. Dicho punto equidista de los lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Ejemplo:

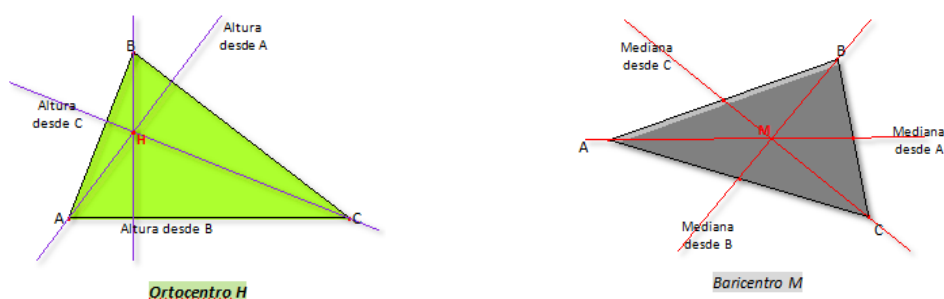


Se llama altura de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro.

Se llama mediana de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama baricentro.

Ejemplo:



Actividades propuestas

43. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado y comprueba que todos los puntos notables coinciden.

44. Calcula el circuncentro de un triángulo rectángulo. ¿Dónde se encuentra?

45. Calcula el ortocentro de un triángulo obtusángulo.

4.4. Igualdad de triángulos.

Dos triángulos son iguales si los tres lados y los tres ángulos son iguales.

Para comprobar que dos triángulos son iguales es suficiente comprobar que se cumple uno de los tres criterios siguientes:

1º Tienen los tres lados iguales.

Es posible construir un triángulo tomando como punto de partida las longitudes de los tres lados: a , b , c

Para ello, se dibuja un segmento de longitud igual a uno de ellos (a por ejemplo). Sus extremos serán dos vértices del triángulo.

A continuación desde un extremo se traza un arco con radio b y desde el otro se traza un arco con radio c . El punto común de los dos arcos es

el vértice que falta:

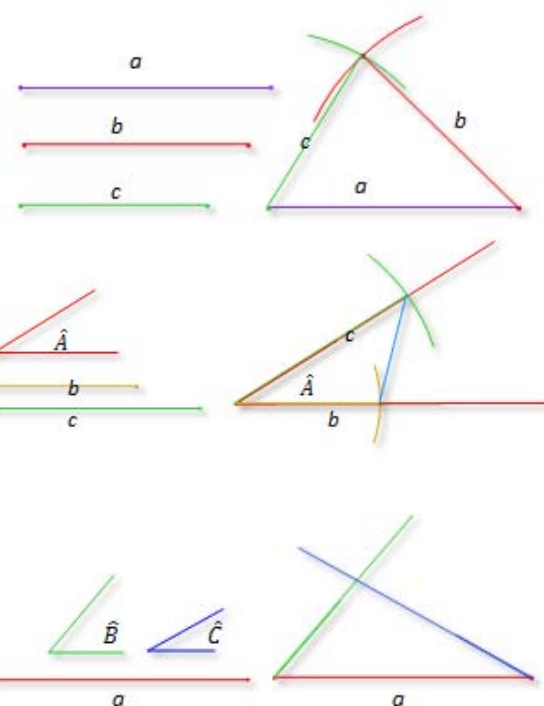
2º Tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ambos.

Pongamos que los datos son las longitudes b y c y el ángulo \hat{A} . Se dibuja en primer lugar el ángulo \hat{A} . Su vértice es un vértice del triángulo. Sobre sus lados se llevan con un compás las medidas b y c , estos arcos son los dos vértices restantes.

3º Tienen un lado igual adyacente a dos ángulos también iguales.

Suponemos conocido el lado a y los ángulos \hat{B} y \hat{C} . Podemos construir el triángulo con facilidad también en este caso.

Se dibuja en primer lugar el segmento a . Sus extremos son dos vértices de nuestro triángulo. En sus extremos, se dibujan los ángulos



TEORÍA: Matemáticas 1º ESO. Capítulo 8: Figuras planas

www.apuntesmareaverde.org

LibrosMareaVerde.tk



y de modo que el segmento a sea un lado de cada uno de ellos. Por último, se prolongan los lados de y hasta que se corten.

Actividades propuestas

46. Dibuja un triángulo en los siguientes casos:

- Sus lados miden 12 cm, 10 cm y 8 cm
- Un lado mide 10 cm y sus ángulos adyacentes 30° y 65° .
- Dos lados miden 10 cm y 8 cm y el ángulo comprendido entre ellos 50° .

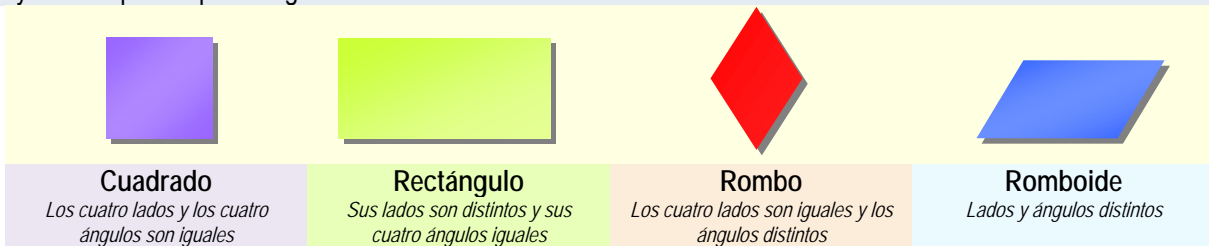
6. CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos. Además, podemos distinguir varios tipos de cuadriláteros convexos.

6.1. Clasificación de los cuadriláteros convexos.

Los cuadriláteros convexos se clasifican en paralelogramos y no paralelogramos.

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



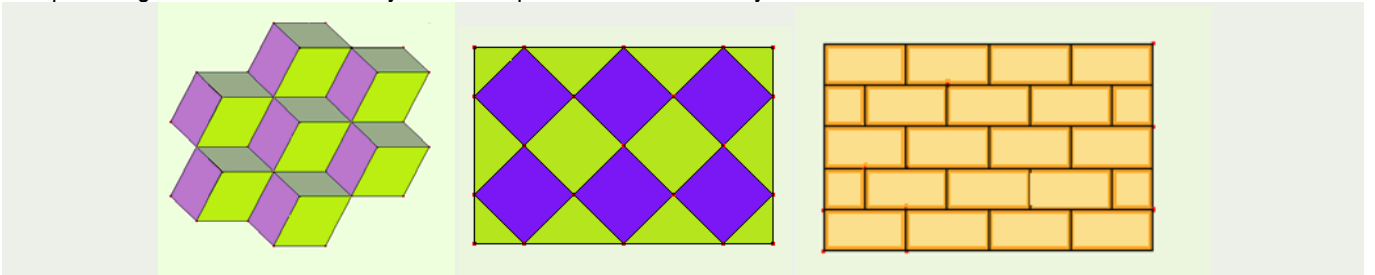
Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:



Además, si un trapezio tiene dos lados iguales, se llama trapezio isósceles y si tiene dos ángulos rectos, se llama trapezio rectángulo.

Ejemplo:

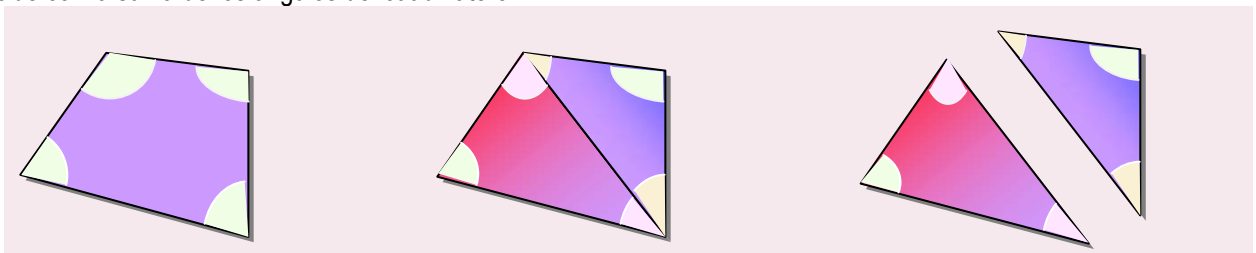
Los paralelogramos tienen muchas y variadas aplicaciones en diseño y construcción



6.2. Propiedades de los cuadriláteros

1. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° .

Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero queda dividido en dos triángulos. La suma de los ángulos de ambos coincide con la suma de los ángulos del cuadrilátero.



Nombramos los ángulos del cuadrilátero	Dibujamos una diagonal y nombramos también los nuevos ángulos que aparecen :	$= 180^\circ$ $= 180^\circ$
		$=$
		$= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

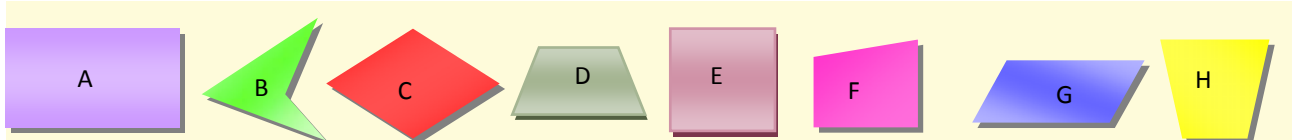
Otras propiedades de los cuadriláteros son

2. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.
3. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.
4. Las diagonales tanto de un rombo como de un cuadrado, son perpendiculares.
5. Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se forma un paralelogramo.

Actividades propuestas

47. Fíjate en el dibujo e indica qué cuadriláteros son:

- a) cóncavos b) paralelogramos c) isósceles d) trapecios e) trapezoides f) regulares




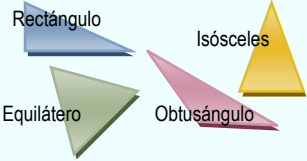
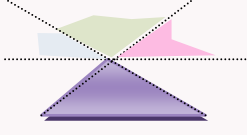
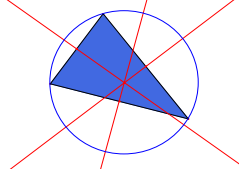
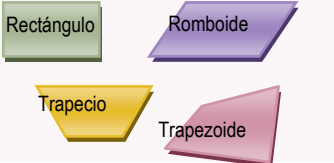
48. Averigua qué tipo de paralelogramo aparece si se unen los puntos medios de:

- a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) un trapecio e) un trapecoide.

49. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32° . ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?.

RESUMEN

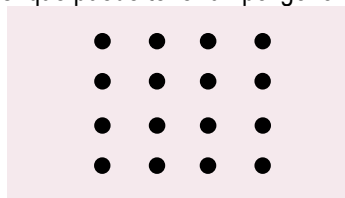
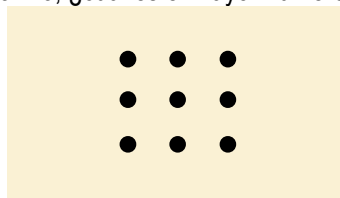
		Ejemplos
Elementos del plano	Los elementos fundamentales del plano son: puntos, rectas, semirrectas, segmentos	
Posición relativa de dos rectas	Dos rectas distintas pueden ser paralelas o secantes	
Polígonos. Elementos de un polígono	Un polígono es una línea poligonal cerrada. Los elementos de un polígono son lados, vértices, diagonales, ángulos interiores y exteriores	
Clasificación de los polígonos	Por el tipo de ángulos cóncavos y convexos. Regulares o irregulares según tengan todos sus lados y ángulos iguales o no. Por el número de lados: triángulos, cuadriláteros,	
Circunferencia y círculo	Una circunferencia es una línea cerrada que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Un círculo es la parte de plano que encierra una	
Elementos de una circunferencia	Centro, radio, diámetro, cuerda, arco.	

Sector circular, segmento circular y corona circular	Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios. Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos. Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.	
Clasificación de triángulos	Según los ángulos: acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos,	
Propiedades	La suma de los ángulos de un triángulo es 180° . En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.	
Rectas y puntos notables en un triángulo	Las mediatrices concurren en el circuncentro, las bisectrices en el incentro, las alturas en el ortocentro y las medianas en el baricentro.	
Clasificación de los cuadriláteros	Paralelogramos si sus lados son paralelos e iguales dos a dos y no paralelogramos. Los paralelogramos se dividen en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Los no paralelogramos pueden ser trapecios o trapezoides.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- Dibuja una recta horizontal y otra que forme un ángulo de 60° con ella.
- Dibuja cuatro rectas de modo que tres de ellas pasen por un mismo punto y la cuarta sea paralela a una de ellas.
- Dibuja dos rectas secantes y un segmento que tenga un extremo en cada una de ellas.
- Si dos rectas r y s son perpendiculares y trazas una tercera recta p paralela a una de ellas, por ejemplo a r , ¿cómo son las rectas s y p ? Haz un dibujo.
- Un ángulo mide $\frac{3}{4}$ de recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
- Calcula :

a) $54^\circ 25' 10'' + 32^\circ 17' 14''$	b) $14^\circ 30' 15'' + 62^\circ 1' 16'' + 42^\circ 1''$
c) $15^\circ 23' + 73^\circ 10'' + 70^\circ 28' 38''$	d) $45^\circ 45' 45'' - 12^\circ 48' 85''$
e) $67^\circ 4' 23'' - 15^\circ 4' 37''$	f) $33^\circ 32' 1'' - 15^\circ 35' 20''$
- La suma de dos ángulos es $125^\circ 46' 35''$. Si uno de ellos mide $57^\circ 55' 47''$, ¿cuánto mide el otro?
- Cinco guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos
- En un tablero de 3×3 , ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono? ¿Y en uno de 4×4 ?



10. La fotografía representa un mosaico de La Alhambra de Granada. Observa que está constituido por motivos geométricos.



- Este mosaico tiene dos tipos de polígonos regulares: ¿Cuáles son?
- Describe el polígono blanco. ¿Es cóncavo o convexo?
- El mosaico de la fotografía no es un mosaico regular. Si lo fuera estaría formado únicamente por polígonos regulares todos iguales.
- Describe un octógono regular: número de lados, cuánto mide su ángulo central, cuánto mide sus ángulos interiores...

11. Calcula el número de diagonales que tienen los siguientes polígonos:

- a) Rombo b) trapecio c) trapecoide d) cuadrado e) rectángulo f) hexágono.

12. Dibuja un hexágono regular y un cuadrado. Marca el centro y sitúa en cada uno de ellos dos apotemas y dos radios.

13. Dibuja un decágono y todas sus diagonales.

14. Completa:

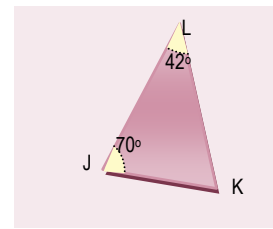
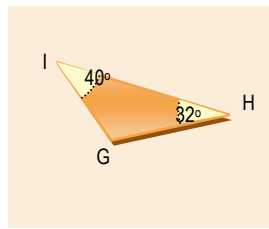
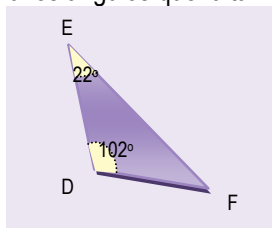
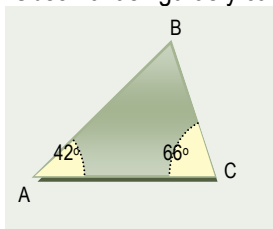
- Un triángulo rectángulo tiene un ángulo
- Un triángulo..... tiene un ángulo obtuso.
- Un triángulo..... tiene los tres ángulos agudos.

15. Construye un triángulo sabiendo que $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ y el ángulo $C = 50^\circ$.

16. ¿Se puede construir un triángulo de modo que sus ángulos midan 105° , 45° y 35° . Razona tu respuesta.

17. Dibuja un triángulo obtusángulo. ¿Crees que las tres alturas son iguales?

18. Observa las figuras y calcula los ángulos que faltan



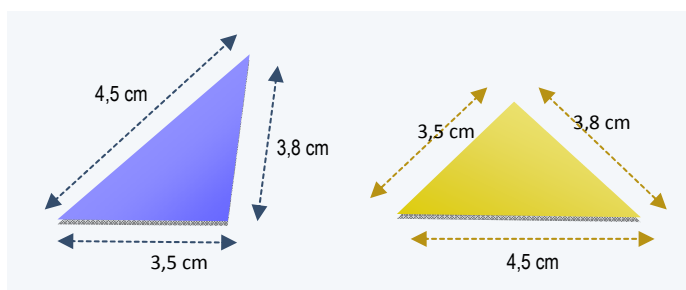
19. Dados tres segmentos de cualquier medida, ¿es siempre posible construir un triángulo?. ¿Por qué?. Recorta tiritas de papel de longitudes de 10 cm, 8 cm y 6 cm, ¿puedes construir un triángulo con ellas?.

20. ¿Puedes asegurar que son iguales los triángulos de la figura derecha?

21. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 50° , indica el valor de los demás. Dibuja un triángulo rectángulo con estos ángulos y un cateto de 5 cm.

22. Si dos de los ángulos de un triángulo miden 30° y 70° , ¿cuánto mide el menor de los ángulos que forman las bisectrices correspondientes?

23. Construye un triángulo sabiendo que $a = 10 \text{ cm}$, los ángulos $B = 45^\circ$ $C = 50^\circ$



24. Calcula el incentro del triángulo anterior y dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

25. ¿En qué punto colocarías un pozo para que tres casas de campo no alineadas, estén a la misma distancia del mismo?. Haz un gráfico esquemático en tu cuaderno y calcula el punto en tu dibujo.



26. Desde uno de los vértices de un hexágono se trazan tres diagonales que dividen al polígono en cuatro triángulos.

- Calcula la suma de los ángulos del hexágono.
- Si el hexágono es regular, calcula el valor de cada uno de sus ángulos interiores.
- En el mismo supuesto, calcula el valor del ángulo central.

27. Dibuja un polígono de 9 lados. ¿Cómo se llama?

- ¿Cuántos triángulos puedes formar al trazar todas las diagonales que parten de un vértice?
- ¿Cuánto vale la suma de los ángulos del polígono inicial?.

28. Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

"Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se trata de un rombo"

"Los trapecios rectángulos tienen todos sus ángulos iguales"

"Los rectángulos son polígonos equiángulos"

"Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio"

Justifica tus respuestas y haz un dibujo que acompañe a cada una.

29. Consigue un hilo grueso y un trozo de papel de color. Recorta el hilo o el trozo de papel, según proceda y construye:

a) Una circunferencia, b) un círculo, c) un radio, d) un segmento circular, e) un sector circular.

30. Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y dos arcos iguales así como las cuerdas que tienen sus mismos extremos. Comprueba que las cuerdas también son iguales.

31. En el dibujo hecho para dar respuesta al ejercicio anterior, traza dos diámetros perpendiculares a las cuerdas. Mide después la distancia de cada cuerda al centro. ¿Qué observas?

32. Dibuja dos rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea de 5 cm. Dibuja después una circunferencia tangente a ambas.

AUTOEVALUACIÓN

1. Dibuja tres puntos A, B, C que no estén alineados y:

a. Las rectas r que pasa por A y B y s que pasa por B y C.

b. La recta perpendicular a r y que pasa por el punto C.

c. La recta perpendicular a s que pasa por B.

d. La recta paralela a s que pasa por A.

2. Calcula el complementario y suplementario de los ángulos siguientes:

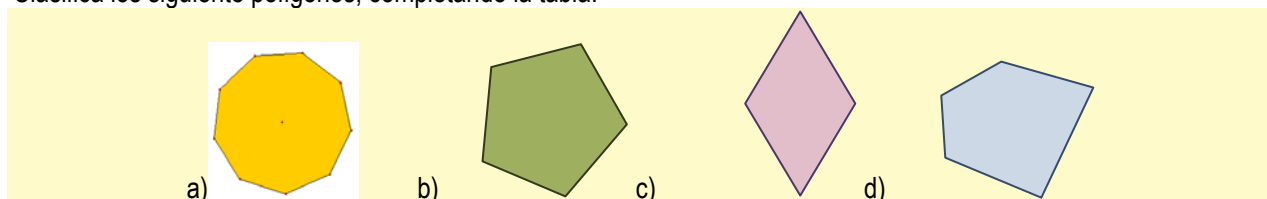
a) 54°

b) $73^\circ 40' 56''$

3. ¿Cuánto valen los ángulos interior y exterior de un pentágono regular?

4. Dibuja un hexágono y todas sus diagonales.

5. Clasifica los siguiente polígonos, completando la tabla:



POLÍGONO	CÓNCAVO	REGULAR	EQUIÁNGULO	EQUILÁTERO	POR EL NÚMERO DE LADOS ES UN
a)	NO	SÍ	SI	SI	ENEÁGONO
b)					
c)					
d)					
e)			SI	NO	CUADRILÁTERO

6. Dibuja un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 6 cm y 5 cm y traza sus tres alturas.

7. a) Dibuja un sector circular de radio 4 cm de modo que su amplitud sea de 82° .

b) Dibuja una corona circular definida por dos círculos de radios 4 cm y 2 cm.

8. Dibuja un triángulo en el que $a = 6$ cm, y 45° . Calcula después su circuncentro.

9. Dibuja un trapecio isósceles, un trapecio rectángulo, un romboide, traza sus diagonales y estudia si se cortan en el punto medio.

10. Calcula el valor del ángulo en las siguientes figuras:

