

## CAPÍTULO 5: FRACCIONES

### 1. INTERPRETACIÓN DE UNA FRACCIÓN

#### 1.1. Introducción

En una fiesta de cumpleaños, cuando llega el momento de repartir la tarta, una persona se encarga de dividirla en porciones. Esa persona está fraccionando la tarta. Cada porción es una fracción de tarta. Además, como quien parte y reparte disfruta de la tarta en último lugar, esa persona intentará que todos los trozos sean prácticamente idénticos, se propondrá dividir la tarta en fracciones iguales.

En muchas situaciones cotidianas hemos de fraccionar. Para pelar una manzana es normal partirla primero por la mitad. De esta forma resultan dos mitades de manzana.

En otras ocasiones nos encontramos con algo que ya ha sido dividido. En Europa, un partido de baloncesto tiene una duración de 40 minutos distribuidos en cuatro tiempos, llamados cuartos, de 10 minutos cada uno. Cada tiempo es una fracción del partido completo, concretamente una cuarta parte.

Algunas fábricas funcionan durante las 24 horas del día. Si cada operario trabaja ocho horas al día, todo encaja si fraccionamos el día en tres turnos de ocho horas cada uno. Así, cada turno se corresponde con la tercera parte de un día completo, es un tercio de día.

Los objetos matemáticos llamados **fracciones** permiten que las personas se entiendan al hablar de trozos, partes o porciones, tanto si se ha troceado en porciones idénticas como si son de diferentes tamaños.

#### 1.2. Términos de una fracción

Comencemos con un ejemplo. Si dividimos un bizcocho en 5 partes iguales, cada porción es una de las cinco partes en las

que hemos dividido el bizcocho. Escribiremos  $\frac{1}{5}$  para representar cada

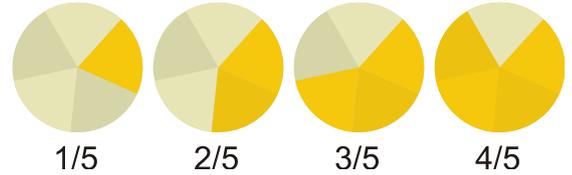
trozo, es decir, cada una de las cinco quintas partes del bizcocho. Si

colocamos en una bandeja tres de esas porciones, sobre la bandeja

habrá tres quintas partes de bizcocho:  $\frac{3}{5}$ . El bizcocho completo puede

representarse de la siguiente forma  $\frac{5}{5} = 1$ , ya que está formado por

cinco quintas partes.



En general, una **fracción** es una expresión de la forma  $\frac{m}{n}$  donde tanto  $m$  como  $n$  son números naturales. Para referirnos a ella diremos " $m$  partido de  $n$ ";  $m$  recibe el nombre de **numerador** y  $n$  es el **denominador**.

Para valores bajos del denominador, disponemos de denominaciones alternativas:

$\frac{1}{2}$ , un medio;  $\frac{2}{3}$ , dos tercios;  $\frac{2}{4}$ , dos cuartos;  $\frac{3}{5}$ , tres quintos;  $\frac{7}{10}$ , siete décimos

A partir del valor 11 del denominador:  $\frac{8}{11}$ , ocho onceavos;  $\frac{6}{23}$ , seis veintitresavos

Una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿es posible, o tiene sentido, que sea mayor el numerador que el denominador? La respuesta es afirmativa, sí. Vamos a comprobarlo en la siguiente circunstancia: imaginemos que hemos comprado dos pasteles idénticos, se ha partido cada uno de ellos por la mitad y alguien se ha comido una mitad. ¿Cómo

expresamos la cantidad de pasteles que quedan? Diríamos que quedan tres mitades de pastel, es decir,  $\frac{3}{2}$  de pastel.

¿Cómo podríamos entender la fracción  $\frac{12}{7}$  (doce séptimos)? Supongamos que disponíamos de varias naranjas iguales y que cada una de ellas ha sido dividida en siete porciones iguales. Si después de comer parte de la fruta solo quedan doce porciones, entonces tendremos  $\frac{12}{7}$  de naranja

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias**.

Con lo que se ha expuesto hasta este momento, intuimos que las fracciones están muy ligadas a la acción de dividir. El denominador de una fracción señala en cuántas porciones se ha dividido cada unidad, lo que nos lleva a conocer el tamaño de cada porción.

**Ejemplos:**

$\frac{16}{9}$ , tenemos 16 porciones, cada una de ellas de tamaño  $\frac{1}{9}$ . Son dieciseis novenas partes.

$\frac{11}{5}$ , hay 11 trozos de tamaño  $\frac{1}{5}$ . Son once quintas partes.

$\frac{23}{12}$ , hay 23 porciones de tamaño  $\frac{1}{12}$ , es decir, 23 doceavas partes.

¿Qué representa la fracción  $\frac{4}{1}$ ? Indica 4 porciones de tamaño  $\frac{1}{1} = 1$ , es decir 4 porciones de algo que no ha sido dividido, con lo cual son 4 unidades:  $\frac{4}{1} = 4$ . Al principio, en el ejemplo del bizcocho, surgió la fracción  $\frac{5}{5}$ . Representa 5 porciones de

tamaño  $\frac{1}{5}$ , cinco quintas partes. Eso es un bizcocho completo:  $\frac{5}{5} = 1$

A la vista de lo anterior podemos escribir unas primeras propiedades de las fracciones que sirven de conexión con los números naturales:

$$\frac{m}{1} = m;$$

$$\frac{m}{m} = 1$$

### Actividades propuestas

1. En cada una de las siguientes imágenes escribe en tu cuaderno la fracción que representan los quesitos de la caja:



a)



b)



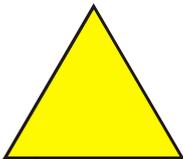
c)



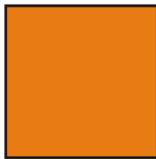
d)

2. Copia en tu cuaderno y divide adecuadamente cada una de las siguientes figuras para poder destacar, en cada caso, la fracción indicada:

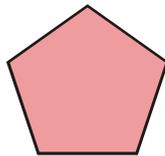
a)  $\frac{1}{2}$



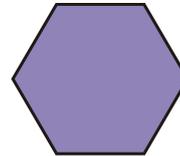
b)  $\frac{3}{4}$



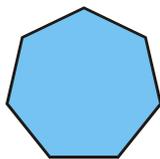
c)  $\frac{2}{5}$



d)  $\frac{3}{6}$



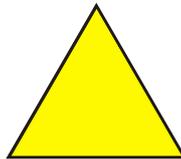
e)  $\frac{7}{7}$



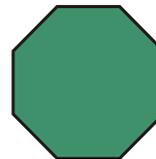
f)  $\frac{1}{4}$



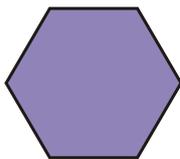
g)  $\frac{2}{3}$



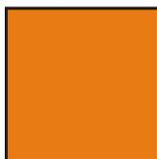
h)  $\frac{3}{4}$



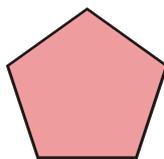
i)  $\frac{4}{9}$



j)  $\frac{1}{4}$



k)  $\frac{7}{10}$



l)  $\frac{5}{8}$



3. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.

4. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

## 2. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

### 2.1. Suma y resta de fracciones con igual denominador

En el comentado ejemplo del bizcocho, después de dividirlo en 5 partes iguales situamos en una bandeja 3 de esas porciones.

De esa manera, sobre la bandeja había tres quintas partes de bizcocho:  $\frac{3}{5}$ . Como cada porción es  $\frac{1}{5}$  de bizcocho, al colocar

uno a uno cada trozo sobre la bandeja lo que estamos haciendo es añadir, sumar:  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ .

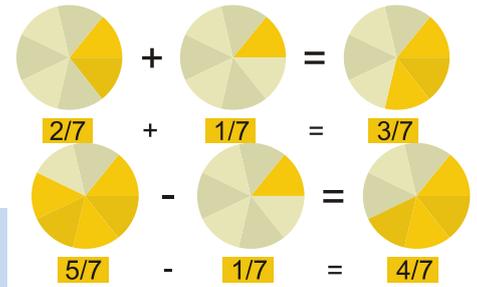
Cuando alguien coja uno de los trozos de la bandeja, en ella quedará una porción menos de bizcocho:  $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Vemos que resulta sencillo sumar y restar fracciones cuando tienen el mismo denominador. Basta realizar la suma, o la diferencia, con los numeradores y mantener el denominador común.

**Ejemplos:**

$$\begin{aligned} \text{➤ } \frac{2}{7} + \frac{3}{7} &= \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7} & \frac{6}{11} + \frac{13}{11} &= \frac{6+13}{11} = \frac{19}{11} \\ \text{➤ } \frac{8}{10} - \frac{7}{10} &= \frac{8-7}{10} = \frac{1}{10} & \frac{9}{4} - \frac{5}{4} &= \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

En general,  $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$        $\frac{m}{n} - \frac{r}{n} = \frac{m-r}{n}$



Para poder sumar fracciones con diferente denominador antes debemos saber qué son *fracciones equivalentes*.

### Actividades propuestas

5. Calcula: a)  $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$     b)  $\frac{4}{13} + \frac{6}{13}$     c)  $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}$     d)  $\frac{7}{1} + \frac{2}{1}$     e)  $4 + \frac{8}{1}$     f)  $1 + \frac{2}{5}$

6. Halla: a)  $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$     b)  $\frac{15}{11} - \frac{7}{11}$     c)  $1 - \frac{4}{7}$     d)  $\frac{8}{3} - 1$

### 2.2. Fracciones equivalentes

Si hemos cortado una pera en dos mitades y otra en cuatro cuartas partes, vemos que 2 peras =  $\frac{2}{2} + \frac{4}{4} = 1 + 1$ .

Cuando solo nos quede una porción de la primera pera y una porción de la segunda pera, es decir, una mitad de pera más

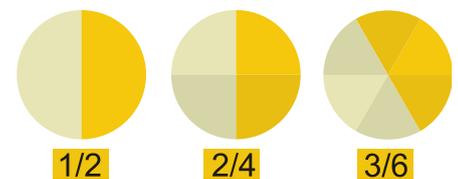
una cuarta parte de pera, tendremos:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  pera.

Pero si partimos la mitad de pera en dos trozos iguales, esa mitad de pera se convierte en dos cuartas partes de pera:

$$\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} \text{ y, de esta forma, } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Si analizamos lo anterior, apreciamos que las fracciones  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{2}{4}$  son **equivalentes**, representan la misma proporción. Es lo mismo media pera que dos cuartos de pera. Además, transformar una fracción en otra equivalente nos va a permitir sumar, o

restar, fracciones con distinto denominador:  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$



A partir de una fracción  $\frac{m}{n}$ , si  $r$  es cualquier número natural entonces la fracción

$$(\frac{m \cdot r}{n \cdot r}) \text{ es equivalente a } \frac{m}{n}, \frac{m \cdot r}{n \cdot r} = \frac{m}{n}$$

**Ejemplo:** Una fracción equivalente a  $\frac{5}{3}$  es, por ejemplo,  $\frac{20}{12}$ , ya que  $\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{20}{12}$

### Actividades propuestas

7. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación: a)  $\frac{1}{3}$     b)  $\frac{7}{4}$     c)  $\frac{24}{9}$

8. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes: a)  $\frac{4}{3}$  y  $\frac{12}{9}$     b)  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{10}{15}$     c)  $\frac{4}{8}$  y  $\frac{3}{6}$

### 2.3. Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Para realizar la suma  $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$  deberemos buscar y encontrar dos números naturales  $r$  y  $s$  que nos transformen cada una de las anteriores fracciones en otras **equivalentes**,  $(m \cdot r)/(n \cdot r)$  y  $(p \cdot s)/(q \cdot s)$ , de forma que las nuevas fracciones tengan el **mismo denominador**, es decir, que  $n \cdot r = q \cdot s$ , en cuyo caso  $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} + \frac{p \cdot s}{q \cdot s} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} + \frac{p \cdot s}{n \cdot r} = \frac{m \cdot r + p \cdot s}{n \cdot r}$

Como hay muchas parejas de números naturales  $r$  y  $s$  que hacen posible esa igualdad, buscaremos los más pequeños. Puesto que  $n \cdot r$  es múltiplo de  $n$  y  $q \cdot s$  es múltiplo de  $q$ , alcanzaremos  $r$  y  $s$  a partir del **mínimo común múltiplo** de  $n$  y  $q$ .  $n \cdot r = q \cdot s = m.c.m.(n, q)$ . El valor de  $r$  resulta de dividir ese mínimo común múltiplo entre  $n$  y el de  $s$  se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo entre  $q$ .

**Ejemplo:**

➤  $\frac{5}{4} + \frac{1}{6}$ . Los denominadores son diferentes, 4 y 6. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 4 nos da 3 y al

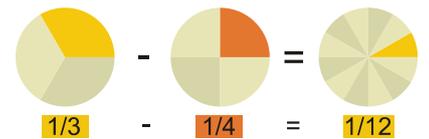
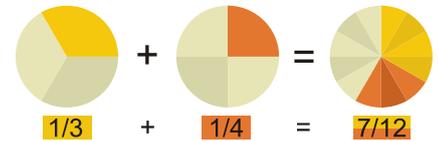
hacerlo entre 6 obtenemos 2.  $\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{15}{12}$   $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$ . Finalmente:  $\frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{15}{12} + \frac{2}{12} = \frac{17}{12}$

**Ejemplo:**

➤  $\frac{5}{7} - \frac{2}{3}$ . Los denominadores son diferentes, 7 y 3. Su mínimo común múltiplo es 21. Al dividir 21 entre 7 nos da 3 y al hacerlo entre 3 obtenemos 7.

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21}; \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21};$$

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{15}{21} - \frac{14}{21} = \frac{15-14}{21} = \frac{1}{21}$$



#### Actividades propuestas

9. Realiza las siguientes sumas de fracciones: a)  $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$  b)  $\frac{5}{6} + \frac{2}{9}$   
 c)  $\frac{7}{8} + \frac{3}{2}$  d)  $\frac{13}{100} + \frac{17}{24}$
10. Calcula: a)  $\frac{3}{14} - \frac{1}{6}$  b)  $\frac{5}{6} - \frac{3}{5}$  c)  $\frac{11}{10} - \frac{11}{24}$  d)  $\frac{10}{21} - \frac{1}{3}$

### 2.4. Propiedades de la suma de fracciones

**Propiedad conmutativa.** Nos indica que no importa el orden en el que coloquemos los sumandos:  $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}$

✚ **Ejemplo:**  $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{15}{18} + \frac{8}{18} = \frac{23}{18}$   $\frac{4}{9} + \frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{8}{18} + \frac{15}{18} = \frac{23}{18}$

**Propiedad asociativa.** Nos señala cómo se pueden sumar tres o más fracciones. Basta hacerlo agrupándolas de dos en dos:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{m}{n} + \left( \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \right) = \left( \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \right) + \frac{r}{s}$$

✚ **Ejemplo:**  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} + \left( \frac{9}{12} + \frac{2}{12} \right) = \frac{1}{2} + \frac{11}{12} = \frac{6}{12} + \frac{11}{12} = \frac{17}{12}$

También:  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{6} = \left( \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{6} = \frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{15}{12} + \frac{2}{12} = \frac{17}{12}$

#### Actividades propuestas

11. Halla: a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  b)  $\frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{3}$  c)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  d)  $\frac{7}{6} + \frac{3}{10} + \frac{1}{4}$
12. Calcula: a)  $\frac{11}{8} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3}$  b)  $\frac{11}{3} - \frac{5}{12} + \frac{13}{18}$  c)  $\frac{15}{6} - \frac{4}{9} - \frac{1}{2}$

### 3. PRODUCTO Y COCIENTE DE FRACCIONES

#### 3.1. Reducción de una fracción. Fracciones irreducibles

Anteriormente dijimos que  $1/2$  y  $2/4$  son fracciones equivalentes. Por la misma razón, otras fracciones equivalentes son  $3/5$ ,  $6/10$  y  $24/40$  puesto que  $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$ ;  $\frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{24}{40}$ ;  $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$ . Una manera alternativa de destacar

estas relaciones consiste en decir que las fracciones  $3/5$  y  $6/10$  son reducciones de la fracción  $24/40$ , mientras que  $3/5$  es una reducción de  $6/10$ . Podemos intuir que la fracción  $3/5$  no puede reducirse más, es una **fracción irreducible**.

En general, si tenemos dos fracciones  $m/n$  y  $p/q$  diremos que  $m/n$  es una reducción de  $p/q$  si  $m < p$  y el resultado de dividir  $p$  entre  $m$  es el mismo que el de  $q$  entre  $n$ . Dicho de otro modo, si tenemos una fracción  $p/q$  y  $d$  es un número natural que divide tanto a  $p$  como a  $q$ , si  $p:d = r$  y  $q:d = s$ , entonces las fracciones  $r/s$  y  $p/q$  son equivalentes y  $r/s$  es una reducción de  $p/q$ . En

este caso:  $\frac{r}{s} = \frac{r \cdot d}{s \cdot d} = \frac{p}{q}$

Obtendremos la mayor reducción de una fracción  $p/q$  al dividir tanto  $p$  como  $q$  entre su **máximo común divisor**.

Una fracción es **irreducible** cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.

##### Ejemplo:

- Una reducción de  $24/40$  es  $6/10$ , pues la obtenemos al dividir tanto 24 como 40 entre 4.

Como el máximo común divisor de 24 y 40 es 8, la mayor reducción de la fracción  $24/40$  es  $3/5$ . Al ser el máximo común divisor de 3 y 5 igual a 1, la fracción  $3/5$  es irreducible, tal y como era de esperar.

##### Ejemplo:

- En ocasiones, una fracción se reduce a un número natural como, por ejemplo, la fracción  $30/6$ . Así es, pues el máximo común divisor de 30 y 6 es igual a 6, y al dividir 30, el numerador, entre 6 obtenemos 5, y al dividir 6, el denominador, también entre 6 obtenemos el número 1:  $30/6 = 5/1 = 5$ .

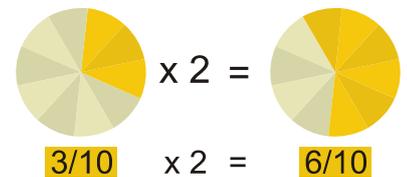
Dos fracciones son equivalentes si se reducen a una misma fracción irreducible. Por esta razón:

Dos fracciones  $\frac{m}{n}$  y  $\frac{p}{q}$  son **equivalentes** si  $m \cdot q = n \cdot p$

#### Actividades propuestas

13. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible: a)  $\frac{48}{18}$

b)  $\frac{14}{49}$       c)  $\frac{8}{8}$       d)  $\frac{60}{148}$



14. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes: a)  $\frac{4}{8}$  y  $\frac{3}{6}$

b)  $\frac{3}{7}$  y  $\frac{4}{9}$       c)  $\frac{5}{8}$  y  $\frac{105}{168}$

#### 3.2. Producto de fracciones

Podemos multiplicar un número natural por una fracción si razonamos de la siguiente manera:

$2 \cdot 5/7$  o  $5/7 \cdot 2$  lo leemos como "dos veces la fracción  $5/7$ ". Así:  $2 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5+5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$

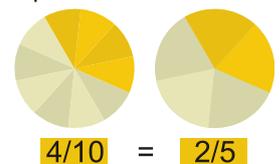
De otra forma,  $5/7$  indica 5 porciones de tamaño  $1/7$ . El producto  $2 \cdot 5/7$  señala dos veces 5 porciones de tamaño  $1/7$ , esto es,  $2 \cdot 5 = 10$  porciones de tamaño  $1/7$ , es decir,  $10/7$ .

En general,  $a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n}$

¿Cómo podemos entender el producto de dos fracciones ambas con numerador igual a uno? Por ejemplo,  $1/2 \cdot 1/3$ :

Al ser  $1/3 = 1 \cdot 1/3$ ,  $1/3$  es UNA porción de algo que se ha dividido en tres partes, de igual manera que  $2/3 = 2 \cdot 1/3$  representa DOS porciones de algo que se ha dividido en tres partes. Análogamente,  $1/2 \cdot 1/3$  nos apunta hacia la mitad de una porción de algo dividido en tres partes, es decir, una sexta parte, puesto que primero dividimos en tres porciones y luego cada una de

ellas en dos:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$



$$\text{En general, } \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{n \cdot q}$$

A la vista de lo anterior:

Para **multiplicar** dos fracciones multiplicaremos sus numeradores entre sí y lo mismo haremos con los denominadores:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

$$\text{Justificación: } \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \left(m \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{q} \cdot p\right) = m \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{q}\right) \cdot p = m \cdot \left(\frac{1}{n \cdot q}\right) \cdot p = \frac{m \cdot 1}{n \cdot q} \cdot p = \frac{m}{n \cdot q} \cdot p = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

**Ejemplo:**

$$\triangleright \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} = \frac{12}{42}$$

$$\text{Podemos simplificar, reducir, el resultado: } \frac{12}{42} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{2}{7}$$

### Actividades propuestas

15. Calcula: a)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$       b)  $7 \cdot \frac{5}{9}$       c)  $8 \cdot \frac{1}{7}$       d)  $\frac{6}{10} \cdot \frac{11}{2}$

16. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a)  $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8}$       b)  $\frac{9}{12} \cdot \frac{4}{3}$       c)  $\frac{14}{6} \cdot \frac{5}{21}$       d)  $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3}$

### 3.3. Propiedades del producto de fracciones

**Propiedad conmutativa.** Nos indica que no importa el orden en el que coloquemos los factores:  $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$

$$\text{Ejemplo: } \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{5} = \frac{7 \cdot 11}{9 \cdot 5} = \frac{77}{45}; \quad \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{11 \cdot 7}{5 \cdot 9} = \frac{77}{45}$$

**Propiedad asociativa.** Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más fracciones. Basta hacerlo agrupándolas de dos en

dos:  $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot \frac{r}{s} = \frac{m \cdot p \cdot r}{n \cdot q \cdot s}$

$$\text{Ejemplo: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{3}{48}$$

**Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.** Cuando en una multiplicación uno de los factores viene

dado como la suma de dos fracciones como, por ejemplo,  $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\right)$  tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$\frac{6}{5} + \frac{1}{4} = \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{24}{20} + \frac{5}{20} = \frac{24+5}{20} = \frac{29}{20}; \quad \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{29}{20} = \frac{8 \cdot 29}{3 \cdot 20} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 29}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 29}{3 \cdot 5} = \frac{58}{15}$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:  $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

$$\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{8 \cdot 6}{3 \cdot 5} + \frac{8 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 2}{5} + \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{16}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{48}{15} + \frac{10}{15} = \frac{48+10}{15} = \frac{58}{15}$$

En general, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q}\right)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente denominamos **sacar factor común**:

$$\frac{12}{5} + \frac{22}{15} = \frac{2 \cdot 6}{5} + \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 3} = \left(\frac{2}{5} \cdot 6\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \left(6 + \frac{11}{3}\right)$$

### Actividades propuestas

17. Realiza los productos indicados: a)  $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}\right)$       b)  $\left(\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$       c)  $\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}$
18. Efectúa las siguientes operaciones: a)  $\frac{7}{2} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)$       b)  $\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{9}{8}$       c)  $\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{8}\right)$

### 3.4. Cociente de fracciones

Son cuatro las operaciones básicas de los números naturales y enteros, a saber: la suma, la resta o diferencia, el producto o multiplicación y la división. Para las fracciones ya han sido establecidas las tres primeras, nos falta la división.

Recordemos cómo podemos entender la división de dos números naturales. Por ejemplo, la división de 6 entre 2, cuyo resultado es 3, podemos entenderla como que si tenemos 6 objetos y los agrupamos de dos en dos resultarán 3 grupos.

De esta forma, la división de 6 (o de la fracción equivalente  $6/1$ ) entre la fracción  $3/4$  nos llevará al número de grupos que obtenemos al repartir 6 unidades en agrupaciones formadas por  $3/4$  partes:

- 6 unidades, ¿a cuántas cuartas partes equivalen? Respuesta: a 24, ya que  $6 \cdot 4 = 24$ . De esta manera,  $6 = 6/1 = 24/4$
- si colocamos 24 cuartas partes de tres en tres, ¿cuántas agrupaciones tenemos? Respuesta: 8, pues  $24:3 = 8$

Es decir,  $6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} : \frac{3}{4} = 8$ . Observemos que  $8 = \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 4}{1 \cdot 3}$

$$\text{En general, } \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

#### Ejemplo:

$$\triangleright \frac{12}{5} : \frac{4}{7} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{84}{20} = \frac{21 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{21}{5}$$

### Actividades propuestas

19. Calcula: a)  $\frac{7}{2} : \frac{3}{4}$       b)  $\frac{11}{6} : \frac{2}{5}$       c)  $\frac{5}{7} : \frac{5}{7}$       d)  $\frac{6}{4} : \frac{12}{8}$       e)  $\frac{16}{5} : 3$
20. Realiza las siguientes divisiones y reduce, simplifica, el resultado:
- a)  $\frac{15}{2} : \frac{5}{4}$       b)  $\frac{6}{5} : \frac{1}{5}$       c)  $\frac{4}{3} : \frac{4}{7}$       d)  $15 : \frac{3}{5}$

## 4. OTROS ASPECTOS DE LAS FRACCIONES

### 4.1. Comparación, representación y ordenación de fracciones

Puesto que las fracciones son números, es interesante que sepamos compararlas, que podamos dictaminar cuál es mayor o cuál es menor. Para averiguarlo podemos transformarlas en otras fracciones equivalentes, de manera que tengan el mismo denominador, y, a la vista de los numeradores, ya es muy sencillo decidir.

#### Ejemplo:

- ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor?  $5/4$  y  $7/5$

Los denominadores son 4 y 5. Su mínimo común múltiplo es 20:  $\frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{25}{20}$ ;  $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{28}{20}$

Conclusión:  $7/5$  es mayor que  $5/4$

#### Ejemplo:

- Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:  $\frac{7}{4}, \frac{19}{12}, \frac{17}{10}$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$m.c.m.(4,12,10) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Los denominadores son 4, 12 y 10. Su mínimo común múltiplo es 60 ya que

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{105}{60}; \quad \frac{19}{12} = \frac{19 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{95}{60}; \quad \frac{17}{10} = \frac{17 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{102}{60}$$

Conclusión:  $\frac{19}{12} < \frac{17}{10} < \frac{7}{4}$

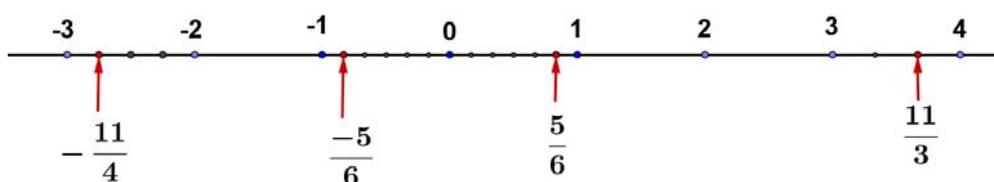
Podemos comprobar que si  $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$  debe cumplirse que  $m \cdot q < p \cdot n$

### Representación en la recta

Para representar una fracción en la recta numérica podemos seguir dos caminos, escribirla en forma de número decimal, y así representarla, o dividir la unidad en tantas partes como diga en denominador, y tomar sobre la recta las partes que diga el numerador. En cursos próximos aprenderás a representarlal con más detenimiento.

**Ejemplo:**

✚ Representa en la recta numérica las fracciones siguientes:  $\frac{11}{3}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{-5}{6}$ ,  $\frac{-11}{4}$ .



### Actividades propuestas

21. En cada uno de los siguientes pares de fracciones, indica cuál es la mayor:

a)  $\frac{7}{8}$  y  $\frac{3}{2}$       b)  $\frac{7}{8}$  y  $\frac{10}{11}$       c)  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{14}{21}$       d)  $\frac{11}{18}$  y  $\frac{14}{21}$

22. Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:  $\frac{12}{7}$ ,  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{8}{5}$ ,  $\frac{6}{11}$

### 4.2. Descomposición de una fracción

Cuando tenemos una fracción  $m/n$  impropia, es decir, una fracción en la que es mayor el numerador  $m$  que el denominador  $n$ , podemos descomponerla como la suma de un número natural más otra fracción en la que ya es mayor el denominador. Para ello basta con dividir el numerador entre el denominador y tener en cuenta tanto el resto como el cociente.

➤ La fracción  $26/3$  es impropia al ser mayor su numerador. Al dividir 26 entre 3 obtenemos un cociente igual a 8 y un

resto igual a 2. Por ello:  $\frac{26}{3} = \frac{(8 \cdot 3) + 2}{3} = \frac{8 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 8 \cdot 1 + \frac{2}{3} = 8 + \frac{2}{3}$

Luego  $26/3$  es igual a ocho unidades más dos terceras partes. En algunas ocasiones, en lugar de escribir  $8 + \frac{2}{3}$  se opta por la

expresión  $8\frac{2}{3}$  lo que se denomina **número mixto**, pues recoge su *parte entera* y su *parte fraccionada*.

Hay que tener cuidado con no confundirlo con  $8 \cdot \frac{2}{3}$

### Actividades propuestas

23. Escribe como número mixto las fracciones: a)  $\frac{11}{6}$ ;      b)  $\frac{34}{5}$

### 4.3. Fracciones negativas

En este capítulo todos los ejemplos de fracciones han sido a partir de dos números naturales, o enteros positivos; uno, el numerador, y, otro, el denominador. Igual que en otros cursos, después de estudiar los números naturales, se dio paso a los números negativos y, con ellos, a los números enteros, vamos a introducirnos ahora en las fracciones negativas. No se ha hecho así desde el principio del capítulo porque parece conveniente adquirir antes cierta soltura y conocimientos sobre fracciones positivas.

En adelante, una fracción será una expresión de la forma  $m/n$  donde tanto  $m$  como  $n$  son números enteros, y el denominador,  $n$ , es distinto de cero.

Las conocidas reglas de los signos de los números enteros, a la hora de multiplicar o dividir, también son válidas para las fracciones. Por ello un convenio extendido sobre el aspecto de una fracción consiste en que el denominador sea un número entero positivo, es decir, un número natural.

Vamos a exponer una serie variada de ejemplos en los que aparecen fracciones negativas y algunas de sus propiedades.

#### Ejemplos:

- $\frac{(-5)}{(-4)} = \frac{(-1) \cdot 5}{(-1) \cdot 4} = \frac{5}{4}$ ;  $\frac{(-2)}{3} = \frac{2}{(-3)} = -\frac{2}{3} = (-1) \cdot \frac{2}{3} = (-2) \cdot \frac{1}{3}$ ;
- $\frac{(-3)}{4} + \frac{6}{5} = \frac{6}{5} + \frac{(-3)}{4} = \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{24}{20} - \frac{15}{20} = \frac{24-15}{20} = \frac{9}{20}$
- $-\frac{7}{2} - \frac{4}{3} = -\left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{21}{6} + \frac{8}{6}\right) = (-1) \cdot \frac{29}{6} = -\frac{29}{6}$
- $\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{9}{24} - \frac{20}{24} = \frac{9-20}{24} = -\frac{11}{24}$

#### Actividades propuestas

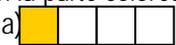
24. Efectúa las siguientes operaciones: a)  $-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$       b)  $\frac{4}{7} + \frac{(-7)}{9}$       c)  $\frac{(-9)}{5} + \frac{(-1)}{8}$

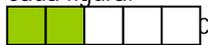
### RESUMEN

NOCIÓN	DESCRIPCIÓN	EJEMPLOS
Fracción	Expresión de la forma $m/n$ donde tanto $m$ , el <i>numerador</i> , como $n$ , el <i>denominador</i> , son números enteros.	$5/6$ , cinco sextos $30/19$ , treinta diecinueveavos
Fracciones impropias	Fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador.	$3/2$ , $25/15$ , $11/10$
Suma de fracciones con igual denominador	Realizamos la suma, o la diferencia, con los numeradores y mantenemos el denominador común.	$\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3+6}{5} = \frac{9}{5}$
Fracciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$10/25$ y $6/15$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$2/3$ , $4/5$ , $10/9$
Producto de fracciones	Multiplicamos sus numeradores entre sí y lo mismo hacemos con los denominadores.	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5 \cdot 1}{6 \cdot 9} = \frac{5}{54}$
Cociente de fracciones	Multiplicamos la primera fracción por la que resulta de intercambiar el numerador y el denominador de la segunda fracción.	$\frac{3}{11} : \frac{5}{7} = \frac{3}{11} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 5} = \frac{21}{55}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$18/11 < 7/4 < 15/8 \Leftrightarrow$ $144/88 < 154/88 < 165/88$
Fracciones negativas	Podemos extender la noción de fracción para que tanto el numerador como el denominador puedan ser números enteros, distinto de cero el denominador.	$-\frac{4}{5} = \frac{(-4)}{5} = \frac{4}{(-5)} = (-1) \cdot \frac{4}{5}$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:
  - Si el denominador de una fracción es un número primo entonces la fracción es irreducible.
  - Si el denominador de una fracción no es un número primo entonces la fracción no es irreducible.
  - Hay fracciones irreducibles cuyo denominador no es un número primo.
  - Cualquier fracción puede ser reducida a una fracción irreducible.
- Ana ha recibido de sus padres 36 euros y su hermano menor, Ernesto, la tercera parte de lo que ha percibido Ana. ¿Qué cantidad recibió Ernesto?
- A una fiesta de cumpleaños asisten 6 personas. La tarta ya ha sido dividida en seis porciones iguales cuando, sin esperarlo, llegan 2 personas más. Describe qué se ha de hacer con la tarta para que todas las personas coman la misma cantidad de tarta.
- Si en la fiesta anterior en lugar de llegar repentinamente 2 personas se marchan 2, antes de distribuir la tarta ya cortada en 6 porciones iguales, comenta lo que se puede hacer con la tarta para que las 4 personas que se han quedado reciban la misma fracción de tarta, y no quede nada de ella.
- Una persona dispone de 1172 euros y ha decidido invertir tres cuartas partes de esa cantidad en cierto producto bancario. ¿Cuál es el importe de lo invertido?
- Una figura maciza pesa ocho kilos y medio. ¿Cuánto pesará una figura y media?
- Dibuja en tu cuaderno para cada caso un rectángulo, que será la unidad, y colorea en él la fracción correspondiente a:
  - $\frac{2}{5}$
  - $\frac{1}{4}$
  - $\frac{3}{8}$
  - $\frac{5}{6}$
  - $\frac{7}{9}$
- Expresa mediante una fracción la parte coloreada de cada figura:
 

a) 

b) 

c) 

d) 
- Calcula:
  - $\frac{1}{13}$  de 39
  - $\frac{1}{10}$  de 50
  - $\frac{1}{7}$  de 35
  - $\frac{1}{3}$  de 21
- Convierte en fracción los siguientes números mixtos:
  - $4\frac{1}{3}$
  - $5\frac{2}{9}$
  - $3\frac{4}{7}$
  - $2\frac{1}{4}$
  - $7\frac{3}{11}$
- Pilar ha leído las  $\frac{3}{4}$  partes de un libro de 300 hojas. Javier ha leído los  $\frac{6}{8}$  del mismo libro. ¿Cuántas páginas han leído cada uno? ¿Cómo son las fracciones utilizadas?
- Decide calculando mentalmente cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a  $\frac{1}{3}$ :
  - $\frac{2}{6}$
  - $\frac{-1}{-3}$
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{7}{21}$
  - $\frac{5}{15}$
- Si se congela, el agua aumenta su volumen en  $\frac{1}{10}$ . Metes en el congelador una botella de un litro y medio, ¿cuánto debes dejar vacío para que no explote?
- Escribe en tu cuaderno las siguientes operaciones y luego calcula el resultado:
  - $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
  - $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$
  - $\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{2}$
  - $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$
- En una obra de teatro han trabajado los  $\frac{3}{8}$  del alumnado de 1º A,  $\frac{1}{2}$  del de 1º B y  $\frac{4}{5}$  del de 1º C. ¿En qué clase han trabajado más estudiantes? Ordena las clases según que hayan trabajado más o menos estudiantes.
- Copia en tu cuaderno y completa los siguientes pares de fracciones para que resulten equivalentes:
  - $\frac{5}{3}$  y  $\frac{\quad}{60}$
  - $\frac{6}{8}$  y  $\frac{21}{\quad}$
- Expresa de forma numérica y calcula el resultado:
  - Un cuarto de tres tercios;
  - Dos séptimos de la mitad;
  - La mitad de la quinta parte
- En un almacén quieren envasar tres mil litros con botellas de  $\frac{1}{3}$ , ¿cuántas botellas necesitan?
- Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:
  - $\frac{13}{6} + \frac{1}{6} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{3}$ ;
  - $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{4}$ ;
  - $\frac{14}{9} + \frac{\quad}{9} = \frac{10}{3}$ ;
  - $\frac{\quad}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{5}$
- Escribe en forma de fracción irreducible las cantidades:
  - 30 minutos de una hora;
  - 45 minutos de una hora;
  - 4 meses de un año;
  - 6 meses de un año;
  - 3 días de una semana;
  - 6 horas de un día.

21. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que resulten impropias:

a)  $\frac{\quad}{5}$       b)  $\frac{34}{\quad}$       c)  $\frac{\quad}{2}$

22. Finaliza las siguientes frases para dos fracciones con numerador y denominador positivos:

- a. si tienen el mismo numerador entonces es mayor la que tiene el ..... denominador  
 b. si tienen el mismo denominador entonces es mayor la que tiene el ..... numerador

### AUTOEVALUACIÓN

1. Señala la fracción que no sea impropia:      a)  $\frac{16}{9}$     b)  $\frac{15}{4}$     c)  $\frac{5}{9}$     d)  $\frac{9}{7}$
2. Indica cuál de las fracciones siguientes es equivalente  $\frac{7}{9}$ :      a)  $\frac{21}{28}$     b)  $\frac{63}{81}$     c)  $\frac{15}{18}$     d)  $\frac{28}{35}$
3. La suma  $\frac{2}{3} + \frac{7}{2} + \frac{5}{6}$  es:      a) 5      b)  $\frac{29}{6}$     c)  $\frac{14}{3}$     d)  $\frac{11}{2}$
4. El lugar vacío que falta es:  $\frac{13}{6} + \frac{1}{6} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{3}$ :      a) 14 y 8      b) 13 y 7      c) 12 y 6      d) 14 y 7
5. Con 6 kilos de azúcar, ¿cuántos azucareros de  $\frac{2}{3}$  kg podemos rellenar?    a) 18    b) 4    c) 9    d) 12
6. Se sabe que un refresco con gas al congelarlo aumentará su volumen  $\frac{1}{9}$  respecto al que tiene a temperatura ambiente. Para congelar 2 litros de esa bebida, el envase debe tener una capacidad al menos de:  
    a) 2,12 litros,      b) 2,22 litros,      c) 2,23 litros      d) 1,95 litros
7. Elige la fracción que sea el resultado de la división  $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ :      a)  $\frac{8}{9}$     b)  $\frac{6}{12}$     c)  $\frac{1}{2}$     d)  $\frac{7}{8}$
8. En cada hoja de un álbum caben seis fotografías. He llenado ya con fotos 7 hojas y me quedan los  $\frac{2}{3}$  de mis fotografías por colocar, en total quiero pegar:      a) 81 fotos      b) 42 fotos      c) 147 fotos      d) 126 fotos
9. La cuarta parte de los  $\frac{2}{3}$  de 600 equivale a:      a) 120      b) 100      c) 150      d) 400
10. Indica cuál de las siguientes fracciones es mayor que  $\frac{6}{8}$ :      a)  $\frac{7}{9}$     b)  $\frac{3}{4}$     c)  $\frac{5}{9}$     d)  $\frac{4}{7}$