

CAPÍTULO 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Ejemplo 1:

- ✚ La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24.312 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión, que debe ser cada 5.000 km?

Siempre que tengas que resolver un problema es conveniente que sigas los siguientes pasos:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con cuidado el enunciado, y piensa:

- ¿Cuáles son los datos? ¿Qué piden?

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema con operaciones con números naturales, luego:

- ¿Qué operaciones aritméticas debo hacer? ¿Habrá que sumar? ¿Habrá que multiplicar? ¿Habrá que restar? ¿Habrá que dividir?

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resolvemos el problema:

Si multiplicas 5.000 por 5 obtienes 25.000. Por tanto, la próxima revisión debe ser a los 25.000 km, luego a la madre de María le faltan $25.000 - 24.312 = 688$ km para hacer la revisión.

Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.

Si sumas a 24.312 los 688 km del resultado tenemos los 25.000 km de la próxima revisión.

Actividades propuestas

- ¡Inventa problemas similares!
- Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 6 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo?
- El cuentakilómetros del padre de Juan marca 64.731 km. Si las revisiones son cada 5.000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?
- La piscina de Inés tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 10 m de largo y 7 m de ancho. Desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?

2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1. Estima el resultado

En muchas ocasiones nos basta con estimar un resultado, no con la solución exacta.

Ya has estimado las dimensiones de tu aula.

A la madre de María, por ejemplo, para estar tranquila le basta saber que le faltan más de 600 km para la próxima revisión.

Mientras que el padre de Juan quizás no necesite saber que exactamente le faltan $65.000 - 64.731 = 269$ km para la próxima revisión, sino estimar que le faltan menos de 300 km para empezar a preocuparse por hacerla.

Para realizar buenas estimaciones es conveniente haber practicado mucho.

Actividades propuestas

Intenta ahora tú estimar las soluciones de estos problemas:

- Si tu paga semanal es de ocho euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un móvil (que estimas que vale unos 300 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?
- Un ascensor sólo puede elevar 500 kg, ¿cuántos de tus amigos piensas que podrían subirse?
- Informan que a una manifestación han ido 40.000 personas, ¿cómo crees que las han contado?
- Si toda la población mundial se diera la mano formando una fila, ¿qué longitud se tendría?
- ¿Cuánta gente cabe de pie en tu aula?
- ¿Cuántos kilómetros andas al año?
- ¿Cuántos granos de arroz hay en un kilo?

2.2. Experimenta, juega con el problema

Al experimentar con los datos del problema es fácil que se te ocurra qué debes hacer con ellos.

Actividades propuestas

- Piensa un número de tres cifras.
 - Escríbelo al revés y resta el menor del mayor.
 - Escribe el resultado al revés y súmalo al resultado de la resta.
 - Escribe la solución final.
 - Prueba con varios números, ¿qué observas? ¿Hay algún caso en el que no se obtenga la misma solución?
 - Prueba con cuatro cifras. ¿Obtienes resultados del mismo tipo que las anteriores?
 - ¿Te atreves con cinco cifras?

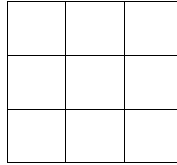
2.3. Hazlo más fácil para empezar

13. "Las torres de Hanoi": Cuenta la leyenda que en tres agujas de oro hay sesenta y cuatro discos todos de distinto tamaño, colocados de mayor a menor. Unos monjes cambian continuamente de sitio estos discos, uno cada segundo con las siguientes reglas: En cada movimiento sólo se puede mover un disco. Y no podemos colocar nunca un disco encima de otro de menor tamaño. Cuando hayan pasado todos los discos de una de las agujas a otra se acabará el mundo. ¿Cuánto falta para que termine el mundo?

Para enfrentarte a este problema, ten en cuenta, lo primero, las **fases**, intenta entender bien el problema.

Luego, **hazlo más fácil para empezar**. En lugar de con 64 discos, empieza sólo con un disco. A continuación, con dos, con tres... Manipula los objetos. Haz un esquema.

14. Cuadrado Mágico



Con los números del 10 al 18 completa en tu cuaderno el cuadro de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

- Hazlo más fácil, comienza con un cuadrado mágico con los números del 1 al 9. ¿Cuánto debe sumar cada fila? ¿Cuál debe ser el número de la casilla central? ¿La suma de $1 + 2 + \dots + 9 = \dots$? ¿Qué número dividido entre 3 nos da: \dots ?

Luego hazte las mismas preguntas con los números del problema inicial.

2.4. Haz un diagrama, un esquema...

En muchas ocasiones hacer un diagrama nos resuelve el problema.

Actividades propuestas

15. "Color del pelo": Tres amigas A, B, C, una rubia, otra morena y otra pelirroja, están jugando a las cartas sentadas en una mesa circular, cada una pasa una carta a la que está a su derecha. La amiga B ha pasado una carta a la rubia. La amiga A ha pasado una carta a la que ha pasado una carta a la pelirroja. ¿Cuál es el color del pelo de A, B y C?

Al hacer un esquema y analizar las dos configuraciones que existen, se observa que una de ellas es inconsistente, ya que uno de las amigas es a la vez rubia y pelirroja. La solución es la otra configuración, que es consistente con el enunciado.

16. Una persona es 80 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

Lee y comprende con cuidado el enunciado, dibuja un esquema y sabrás la solución.

17. Quieren cruzar un río en una barca tres mujeres y tres maridos celosos, si sólo caben dos personas en la barca, y nunca pueden quedar solos una mujer y un marido que no sean pareja, ¿cómo pueden hacerlo?

2.5. Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Es posible que tu problema tenga el mismo aire que otro que ya has resuelto, lo que puede proporcionarte pistas útiles para resolver el nuevo.

Actividades propuestas

18. Se han apuntado 25 estudiantes a un viaje. Al pagar el billete 5 de ellos se dan cuenta que no han traído dinero. El resto decide pagárselo, y abonan cada uno 3 €. ¿Cuánto cuesta cada billete?

19. Observa las ofertas de una tienda:

	<i>Precio anterior</i>	<i>Oferta</i>
Camisetas	15 euros	12 euros
Chaquetas	40 euros	30 euros
Pantalones	32 euros	28 euros
Camisas	25 euros	21 euros

Una persona aprovecha estas ofertas y compra cinco camisas, una chaqueta, dos pantalones y tres camisetas. Averigua cuánto se gasta y cuánto se ahorra por comprar esa ropa en ofertas.

2.6. Escoge una buena notación

Actividades propuestas

20. Calcula mentalmente el producto de dos números y luego suma un tercero:

$$a) 5 \times 9 + 26 =$$

$$b) 200 \times 7 + 128 =$$

$$c) 60 \times 8 + 321 =$$

Ahora al revés: nos dan el resultado y buscamos, de la forma anterior, con qué números puede obtenerse. Por ejemplo, nos dan 1000 y decimos $1000 = 100 \times 7 + 300$.

Sigue ese modelo para expresar los números siguientes: 2000, 4000 y 5500.

21. **Emmy Noether**, una ilustre mujer matemática, nació el 23 de marzo de 1882 y murió el 14 de abril de 1935.

- a) ¿Cuántos años tenía al morir?
 b) ¿Cuántos años han pasado desde el año de su muerte?
 c) ¿Cuántos años faltan para celebrar el centenario de su muerte? ¿Cuántos meses? ¿Cuántos días?



3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. ¡Eureka!

Ya sabes que **Arquímedes** estaba en la bañera cuando exclamó ¡Eureka! pues había descubierto una importante propiedad de los cuerpos sumergidos. Algo parecido ocurre en muchas ocasiones. Tú mismo, si trabajas en un problema, luego tu inconsciente continúa trabajando y, de repente, cuando menos lo esperas ¡Eureka!, tienes la solución. Esta situación, esta emoción positiva y gratificante, también recibe el nombre de ¡Ajá!

En la Historia de la Ciencia se conocen muchas de estas situaciones. Busca alguna y reflexiona sobre cómo te sientes al resolver un problema, que en un primer momento, parecía imposible.

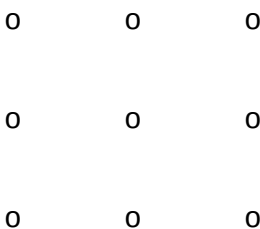
3.2. Bloqueos

Pero también pueden aparecer emociones negativas, a las que llamamos **bloqueos**. Muchas veces, al intentar resolver un problema, éste nos parece imposible, nos desanimamos, entran ganas de dejarlo todo. Esto es un bloqueo. Pero eso le pasa a todo el mundo. Hay que sacar fuerzas y continuar. Buscar la causa del bloqueo.

Veamos algunos problemas sencillos que resultan complicados pues en ellos suele producirse un bloqueo. Intenta primero resolverlos y luego, si no te salen, lee la ayuda.

Actividades propuestas

22. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.



Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Recuerda, lo primero es comprender el enunciado. Prueba a hacerlo. ¿Lo has conseguido? Estupendo. No lo consigues, inténtalo un poco más.

Bloqueo: Si no lo consigues es porque estás presuponiendo algo que no se ha dicho y es que no puedes salir del recinto limitado por los puntos. Haz trazos más largos y lo conseguirás enseguida.

23. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

- Experimenta, juega con el problema. ¡Lo has conseguido! Entonces no has tenido un bloqueo.

Bloqueo: Nadie ha dicho que no pudieras salir del plano. Ahí está el bloqueo. Lo consigues con un tetraedro regular.

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

¿Te gusta jugar? Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Fases: Lo primero, naturalmente, comprender bien las reglas del juego, que es similar a comprender el enunciado. Lo segundo, jugar, hasta encontrar una estrategia ganadora. Luego jugar y ver si tu estrategia es realmente buena. Por último, generalizar, intentar mejorar la estrategia.

Actividades propuestas

Utiliza todo lo que has aprendido.

24. ¡Y ahora un juego! Las tres en raya

Se juega de dos en dos. Copia en el cuaderno la tabla siguiente:

497	315	69	77
115	33	90	22
225	161	46	55
355	142	135	213

Una persona escoge dos números, uno del conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$ y otro del conjunto $B = \{11, 45, 71, 23\}$. Los multiplica mentalmente, y pone su marca (o una ficha, o una bolita de papel) sobre el número resultante. La otra persona hace lo mismo cuando le toque el turno. Gana quien pone tres marcas en línea recta. Ahora ¡a jugar!

25. Realiza el mismo juego de la actividad anterior con este otro tablero, y con los grupos de números: $A = \{2, 5, 7, 4\}$ y $B = \{3, 11, 9, 1\}$.

63	7	21	6
22	4	15	5
45	2	55	44
12	36	18	77

- Inventa con otros números tu propio tablero de juegos.

26. Otro juego

Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original.

Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.

2	4	5	6	1	0	3	7
+	-	x	/	+	-	+	-
/	=	+	=	x	=	x	=
34		147		123		93	

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

27. ¡Hagamos magia!

Dile a una persona que piense un número de tres cifras, que escriba ese número y, de nuevo, las tres cifras, para formar un número de seis cifras. Pídele que lo divida entre 7, luego entre 11 y luego entre 13. Se quedará sorprendida al comprobar que el resultado es el número que escribió. ¿Sabes por qué?

28. **Resuelve el crucigrama:** Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

	x		x	=	24
x		x		x	
	x		x	=	35
x		x		x	
	x		x	=	30
=		=		=	
6		50		84	

RESUMEN

Problema	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
Fases en la resolución de un problema	Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Fase 2: Busca una buena estrategia. Fase 3: Lleva adelante tu estrategia. Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.
Algunas estrategias	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Estima el resultado. ➤ Experimenta, juega con el problema. ➤ Hazlo más fácil para empezar. ➤ Haz un diagrama, un esquema... ➤ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas. ➤ Escoge una buena notación.
Emociones y resolución de problemas	Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka! Emoción negativa: Bloqueo
Juegos de estrategia	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- La Jefe de Estudios de un colegio ha anotado en un cuadro el número de alumnos y alumnas que han faltado a clase. En ese colegio hay ocho clases de Secundaria.
-

	L	M	X	J	V	TOTAL
1° A	2	3	5	1	3	
1° B	3	4	1	3	2	
2° A	2	6	3	4	3	
2° B	5	1	0	2	1	
3° A	4	2	3	1	0	
3° B	6	3	1	2	3	
4° A	2	3	1	4	0	
4° B	4	2	2	2	0	
TOTAL						

Copia la tabla en tu cuaderno y resuelve allí el ejercicio. a) Completa las últimas fila y columna del cuadro. b) Sabiendo que el número total de alumnos y alumnas de ese colegio en Secundaria es de 205, averigua cuántos había en el colegio el jueves.

- “El extraordinario 37”

$$37 \times 3 = 111$$

$$37 \times 6 = 222$$

$$37 \times 9 = 333$$

Consigue tú ahora 444, 555, 666...

- En una cuadrícula de cuatro por cuatro, coloca los números del 1 al 16 en los cuadrados, cada uno en uno. Multiplica los números de cada dos cuadrados adyacentes y escribe el producto en cada arista. Suma los números que hay en cada arista. Queremos que la suma sea lo menor posible, ¿Cómo debemos colocar los números del 1 al 16?



5. Triángulos

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

Comprueba que el triángulo sigue hasta llegar a +10.

6. Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.
7. **Números en fuga:** Estas operaciones se han quedado sin resolver por falta de algunos números. ¿Puedes completarlas? Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad 3 \square 89 \square \\ \quad 46410 \\ \hline \quad \square 25 \square 6 \\ \quad 1 \square 9 \square 53 \end{array}$$

$$\text{b)} \quad 4 \square 2 : \square 5 = 17 \text{ resto } 07$$

$$\text{c)} \quad 2 \square 3 \square \times 75 = 2 \square 0050$$

8. Dos mujeres habían ido al mercado a vender 30 manzanas cada una. La primera tenía la intención de vender cada dos manzanas por un €. ¿Cuánto pensaba ganar? La segunda quería vender cada tres manzanas por dos €. ¿Cuánto ganaría? Pero no querían hacerse la competencia por lo que llegaron al siguiente acuerdo: vender ambas cada cinco (2 + 3) manzanas por tres (1 + 2) €. Lo habían vendido todo. ¿Han ganado 36 €? ¿Les sobra un €! Con la venta anterior iban a ganar 35 €, y han ganado 36 €. ¿Puedes explicarles qué ha ocurrido?
9. Sofía, que es muy sabia, se lo ha explicado, y se han puesto tan contentas que han decidido ir a comer las tres juntas. Pagaron la comida con 30 €, y el camarero les devolvió 5 €. Cada una se quedó con un €, pero sobraban 2 que dejaron de propina. ¡De nuevo tenían un problema! ¡Ahora faltaba un €! Han pagado $10 - 1 = 9$ € cada una, que por 3 son 27 €, más 2 de propina son $27 + 2 = 29$. Y en un principio tenían 30. ¿Les falta uno! Explica lo sucedido.
10. **Letras y números:** Si sigues el orden alfabético estas cuatro operaciones dan como resultado letras con las que podrás formar una palabra:

$$(8 + 10) : 3 + 7 \times 1 - 5 =$$

$$(23 - 15) + 2 \times 4 =$$

$$1 \times 4 + 6 : 2 + 5 \times 1 =$$

$$45 \times (1 + 0) - 45 + 1 =$$

Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

11. "El lobo, la cabra y el repollo": Un hombre tiene que cruzar un río en una barca con un lobo una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir él y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está el hombre delante, el lobo se come la cabra y la cabra se come el repollo ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?
12. Juan, Jaime y Jorge tienen cada uno dos oficios. Hay un barbero, un chofer, un tabernero, un músico, un pintor y un jardinero. ¿A qué se dedica cada uno de ellos? Sabiendo que:
1: El chófer se burló del músico porque tenía el pelo largo. 2: El músico y el jardinero pescan con Juan
3: El pintor compró al tabernero vino. 4: El chófer cortejaba a la hermana del pintor
5: Jaime debía 5 dólares al jardinero. 6: Jorge vio a lo lejos a Jaime y al pintor.

13. Sorpresas del 8 y el 9:

$$0 \cdot 9 + 8 = 8$$

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$

$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$

$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$

$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888 \quad \text{¿Te animas a continuar la pirámide?}$$

14. Nos dan 16 bolas del mismo tamaño, pero una de ellas pesa un poco menos que las otras. Para averiguar cuál es disponemos de una balanza de dos platos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que necesitas efectuar para, sin tener en cuenta la buena suerte, determinar la bola? ¿Y si son 32 bolas? ¿Y si son 27? ¿Y si 13? Generaliza el problema a cualquier número de bolas.
15. Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restara. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?
16. ¿Cuál es el máximo número de ángulos rectos que puede haber en un polígono de n lados?